

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $f, g$  συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο σημείο  $x_0$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  με  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$   
(μονάδες 7)

**B.** Η συνάρτηση  $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία  $x=0$  και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία  $y=2x-1$ . Να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-1}{f(x)}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(μονάδες 8)

**Γ. i.** Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι και συνεχής στο σημείο  $x_0$ .  
(μονάδες 3)

ii. Με κατάλληλο παράδειγμα να εξηγήσετε γιατί δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.  
(μονάδες 3)

iii. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση:

$$f(x) = \int_{-2}^{x+3} \sqrt{t^2-1} dt \quad (\text{μονάδες } 4)$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

**A.** Έστω ο μιγαδικός  $z$ . Να αποδείξετε ότι  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ .  
(μονάδες 3)

**B.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για το μιγαδικό  $z$  με  $\text{Im}(z) \neq 0$  ισχύουν:

$$z + \frac{1}{z} = f(\alpha) \text{ και } z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$ .

Να αποδείξετε ότι:

**α. i.** Η εικόνα  $M$  του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο το  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ .  
(μονάδες 8)

ii.  $f^2(\beta) = f^2(\alpha) - 2$   
(μονάδες 5)

**β.** Υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , ώστε  $(\alpha - \beta)f(\xi)f'(\xi) = 1$   
(μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω συνάρτηση  $f$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με συνεχή δεύτερη παράγωγο και σύνολο τιμών το διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , όπου  $\alpha < 0 < \beta$ .  
Να αποδείξετε ότι:

i. υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία  $x_1, x_2$  με  $x_1 \neq x_2$ , ώστε  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ .  
(μονάδες 8)

- ii. υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός  $x_3 \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f''(x_3) = 0$ .  
(μονάδες 5)
- iii. Η εξίσωση  $f(x) + f'(x)f''(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .  
(μονάδες 5)
- iv. Η εξίσωση  $f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .  
(μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $\Delta = (0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει  $f(x) \neq 1$  και

$$f(x) = \frac{1}{2} + \int_x^{x^2} \frac{1}{t} [1 - f(\frac{t}{x})]^2 dt \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1} + x, \quad x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .  
(μονάδες 10)
- ii. Η  $g$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ .  
(μονάδες 5)
- iii. Ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $x > 0$  και βρείτε το σύνολο τιμών της  $f(\Delta)$ .  
(μονάδες 7)
- iv. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(x+1)}$   
(μονάδες 5)

## 2 ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

### ΘΕΜΑ 1ο

- A. i. Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F(x)$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι όλες οι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  είναι της μορφής:  $G(x) = F(x) + c$   
(μονάδες 6)
- ii. Να αποδείξετε ότι
- α)  $\int xg''(x)dx = xg'(x) - g(x) + c$
- β)  $\int_0^a g(a-x)dx = \int_0^a g(x)dx$
- με την υπόθεση ότι  $a \in \mathbb{R}$  και  $g$  τρεις φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .  
(μονάδες 6)
- B. i. Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  με  $f'(x) = 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ .  
(μονάδες 5)
- ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.  
(μονάδες 5)
- iii. Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ ; (μονάδες 3)

## ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[1, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, 2)$  με παράγωγο γνησίως αυξούσα στο  $(1, 2)$ .

Αν  $f(1) = f(2) = 0$ , να αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχει μοναδικός αριθμός  $\xi \in (1, 2)$  ώστε  $f'(\xi) = 0$ . (μονάδες 8)
- ii. Η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο  $x_0 = \xi$ . (μονάδες 9)
- iii. Ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (1, 2)$ . (μονάδες 8)

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός  $z$  και έστω  $f(z) = \frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$ ,  $z \neq 1$

- α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού  $f(2)$ . (μονάδες 3)
- β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $w = [f(2)]^{2004}$  είναι πραγματικός. (μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = |z|$ . (μονάδες 8)
- δ) Αν  $|z| = 1$  και  $M$  είναι η εικόνα του  $f(z)$  στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το  $M$  ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Θέμα Προσομοίωσης 2001) (μονάδες 9)

## ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η ισότητα

$$\int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι:
  - i. Η τιμή της  $f$  στο  $x_0=0$  είναι  $f(0) = 0$ . (μονάδες 3)
  - ii. Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση 
$$\int_{(f(x)(3x))}^{(f(x)(x^2+2))} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt > 0.$$
 (μονάδες 5)
- γ) Αν επιπλέον η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $f'(0) = 1$ . (μονάδες 10)

## ΘΕΜΑ 1ο

**A. i)** Έστω οι μιγαδικοί  $z_1$  και  $z_2$ . Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

**β)**  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*(μονάδες 7)*

**ii)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

**α)** Έστω  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί. Αν  $|z_1| = |z_2|$  τότε  $z_1 = \pm z_2$

**β)** Αν οι αριθμοί  $\kappa, \lambda$  είναι θετικοί ακέραιοι, τότε ισχύει πάντοτε η ισοδυναμία:

$$i^\kappa = i^\lambda \Leftrightarrow \kappa = \lambda$$

**γ)** Το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει σχέση:  $|z+3i| = |2+3i|$  είναι κύκλος.

*(μονάδες 6)*

**B. i)** Έστω συνάρτηση  $f$ , η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

*(μονάδες 6)*

**ii)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

**α)** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[1, 2]$  με  $f(1) = 3$  και  $f(2) = 5$  τότε δεν υπάρχει  $x_0 \in (1, 2)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**β)** Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Τότε δεν υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

*(μονάδες 6)*

## ΘΕΜΑ 2ο

Η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου τα  $a, b, \gamma$  είναι πραγματικοί αριθμοί, έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2 < x_3$ .

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Υπάρχουν ακριβώς δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία  $\xi_1, \xi_2$  στα οποία η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. *(μονάδες 8)*

**β)** Ισχύει  $a^2 > 3b$ . *(μονάδες 5)*

**γ)** Για τα  $\xi_1, \xi_2$  είναι  $f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = 0$ . *(μονάδες 5)*

- δ) Η  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής του οποίου η τετμημένη βρίσκεται μεταξύ των  $\xi_1, \xi_2$ . (μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με τύπο

$$f(x) = |x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2$$

όπου  $z$  συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός με  $z = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ .

- α) Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . (μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ , εάν  $|z+1| > |z-1|$ . (μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και το πλήθος των ριζών της.  
(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων Ιουλίου 2002) (μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 4ο

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 1$  και

$$f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι:

- i) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x + 2 \quad \text{(μονάδες 7)}$$

- ii) Η  $f$  αντιστρέφεται με αντίστροφη

$$f^{-1}(x) = x^3 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(μονάδες 4)}$$

- iii) Η τιμή της  $f$  στο  $x_0 = -2$  είναι  $f(-2) = 0$ . (μονάδες 2)

B. Να βρείτε τα σημεία καμπής της  $f$ . (μονάδες 5)

Γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'$ ,  $y'$  και τη γραμμή  $x = -2$ .  
(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία

B. i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-1}{f(x)} = 0$  [γιατί  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x-1) = -1$ ]

iii.  $\lim [f(x) - 2x] = -1$

iv. Έστω  $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = xg(x)$  με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$  (από i) τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = +\infty$$

Γ. i. Θεωρία

ii. Θεωρία

iii. Η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{t^2 - 1}$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  και

$-2 \in (-\infty, -1]$ . Άρα, η συνάρτηση

$$h(x) = \int_{-2}^x \sqrt{t^2 - 1} dt$$

είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, -1]$ . Επίσης η συνάρτηση  $\varphi(x) = x+3$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Επομένως, η

$$f(x) = \int_{-2}^{x+3} \sqrt{t^2 - 1} dt = h(\varphi(x))$$

είναι παραγωγίσιμη για

$$x \in \mathbb{R} \text{ και } \varphi(x) \in (-\infty, -1]$$

άρα

$$x+3 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -4.$$

Έτσι, η f είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta = (-\infty, -4]$ .

ΘΕΜΑ 2ο

A. Έστω  $z = \alpha + \beta i$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Τότε  $\bar{z} = \alpha - \beta i$ . Επομένως:

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow \alpha - \beta i = \alpha + \beta i \Leftrightarrow 2\beta i = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

B. α. i. Αφού  $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$  είναι  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$  οπότε  $z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} \Leftrightarrow$

$$z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z^2 \bar{z} + \bar{z} - z \bar{z}^2 - z = 0 \Leftrightarrow (z\bar{z} - 1)(z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \quad \text{ή} \quad z = \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \quad \text{ή} \quad z \in \mathbb{R}$$

Αφού όμως  $\text{Im}(z) \neq 0$  η περίπτωση  $z \in \mathbb{R}$  απορρίπτεται. Άρα  $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$  που αποδεικνύει ότι η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

$$\text{ii. } f^2(\alpha) - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + 2z \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$$

**β.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f^2(x)$ , η οποία είναι προφανώς παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ . Από το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , έχουμε ότι: υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi) = \frac{f^2(\beta) - f^2(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ &\Leftrightarrow 2(\beta - \alpha)f(\xi)f'(\xi) = -2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)f(\xi)f'(\xi) = 1. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 3ο

- i.** Αφού η  $f$  έχει σύνολο τιμών  $[\alpha, \beta]$ , παρουσιάζει ελάχιστη τιμή  $\alpha$ , δηλ. υπάρχει  $x_1 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_1) = \alpha$  (1) και μέγιστη τιμή  $\beta$ , δηλ. υπάρχει  $x_2 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_2) = \beta$  (2). Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , από το θεώρημα Fermat έχουμε  $f'(x_1) = 0$  και  $f'(x_2) = 0$ . Προφανώς  $x_1 \neq x_2$ .
- ii.** Έστω π.χ.  $x_1 < x_2$ . Η  $f'$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  με  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ . Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει  $x_3 \in (x_1, x_2)$  ώστε  $f''(x_3) = 0$ .
- iii.** Η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + f'(x)f''(x)$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  με  $g(x_1) = f(x_1) + f'(x_1)f''(x_1) = \alpha < 0$  και  $g(x_2) = f(x_2) + f'(x_2)f''(x_2) = \beta > 0$ . Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  με  $g(\xi) = 0$ . Το  $\xi$  είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης.
- iv.** Η συνάρτηση  $h(x) = f'(x)e^{f(x)}$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  με  $h'(x) = f''(x)e^{f(x)} + f'(x)[e^{f(x)}]' = e^{f(x)}[f''(x) + (f'(x))^2]$ . Επίσης  $h(x_1) = f'(x_1)e^{f(x_1)} = 0$  και  $h(x_2) = f'(x_2)e^{f(x_2)} = 0$ . Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  ώστε  $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + (f'(\xi))^2 = 0$ .

### ΘΕΜΑ 4ο

- i.** Θέτω  $\frac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = xu$  άρα  $dt = xdu$ . Για  $t = x$  είναι  $u = 1$  και για  $t = x^2$  είναι  $u = x$ .

$$\text{Έτσι, } f(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{1}{x} [1 - f(u)]^2 x du = \frac{1}{2} + \int_1^x [1 - f(u)]^2 du$$

Επομένως η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  με

$$f'(x) = \left( \frac{1}{2} + \int_1^x [1 - f(u)]^2 du \right)' = [1 - f(x)]^2 > 0 \quad (1)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

- ii.** Η  $g$  είναι προφανώς παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \left( \frac{1}{f(x) - 1} + x \right)' = \frac{-f'(x)}{[f(x) - 1]^2} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Άρα η  $g$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ .

iii. Για  $x=1$  είναι  $f(1) = \frac{1}{2} + \int_1^1 [1-f(u)]^2 du = \frac{1}{2}$  οπότε  $g(1) = \frac{1}{f(1)-1} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} + 1 = -2 + 1 = -1$  και αφού η  $g$  είναι σταθερή, έχουμε

$$g(x) = -1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$g(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-1} + x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-1} = -x-1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

Οπότε  $f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)) = (0, 1)$

iv. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(\ln(x+1))'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

A. i. Θεωρία

ii. α)  $\int xg''(x)dx = \int x[g'(x)]'dx = xg'(x) - \int g'(x)dx = xg'(x) - g(x) + c$

β) Με την αντικατάσταση  $u = \alpha - x$  είναι:  $dx = -du$  και

$$\int_0^a g(\alpha-x)dx = -\int_a^0 g(u)du = \int_0^a g(u)du = \int_0^a g(x)dx.$$

B. Θεωρία

### ΘΕΜΑ 2ο

i. Προφανώς, ισχύει το θεώρημα του Rolle για την  $f$  στο  $[1, 2]$ , οπότε υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  με  $f'(\xi) = 0$ . Το  $\xi$  είναι μοναδικό γιατί η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Για  $x < \xi$  είναι  $f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < 0$  και για  $x > \xi$  είναι  $f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ , οπότε η  $f$  έχει ελάχιστο στο  $x_0 = \xi$ , γιατί είναι συνεχής σ' αυτό και εκατέρωθεν του αλλάζει πρόσημο.

iii. Από το (ii) ερώτημα προκύπτει ο επόμενος πίνακας με τη μονοτονία της  $f$ , από την οποία φαίνεται ότι  $f(x) < 0$  στο  $(1, 2)$ .

$x$	1	$\xi$	2
$f'$	-	0	+
$f$	0	$f(\xi)$	0

### ΘΕΜΑ 3ο

$$\alpha. f(2) = \frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{2+2i}{-1} = -2-2i$$

$$\text{οπότε } |f(2)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\beta. \text{ Είναι } [f(2)]^2 = (-2-2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i$$

$$[f(2)]^4 = (8i)^2 = 64i^2 = -64 \quad \text{και}$$

$$[f(2)]^{2004} = \{[f(2)]^4\}^{501} = -64^{501}$$

Άρα, ο  $f(2)$  είναι πραγματικός αριθμός

γ. Με την αντικατάσταση του  $f(z)$  στο 1ο μέλος, μετά τις πράξεις προκύπτει το 2ο μέλος.

$$\left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = \left| \frac{\frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} - 2}{\frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} + i} \right| = \left| \frac{\frac{2+i\bar{z}-2+2i\bar{z}}{1-\bar{z}}}{\frac{2+i\bar{z}+i-i\bar{z}}{1-\bar{z}}} \right| = \left| \frac{\bar{z}(2+i)}{2+i} \right| = |\bar{z}| = |z|.$$

δ. Αν θέσουμε  $M(x, y)$ , τότε  $f(z) = x + iy$ , οπότε με  $|z| = 1$  από το (γ) ερώτημα είναι διαδοχικά:

$$\left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = 1$$

$$\text{ή} \quad |f(z)-2| = |f(z)+i|$$

$$\text{ή} \quad |x + iy - 2| = |x + iy + i|$$

$$\text{ή} \quad |(x-2) + iy| = |x + i(y+1)|$$

$$\text{ή} \quad \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\text{ή} \quad -4x - 2y + 3 = 0, \text{ που απαντάει στο ερώτημα}$$

### ΘΕΜΑ 4ο

α. i. Για  $x=0$  έχουμε:

$$\int_0^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 0$$

Επειδή  $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , θα είναι  $f(0) = 0$ . Πράγματι

$$* \text{ αν είναι } f(0) > 0, \text{ τότε, } \int_0^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt > 0, \text{ άτοπο.}$$

$$* \text{ αν πάλι } f(0) < 0, \text{ τότε, } \int_0^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt < 0, \text{ άτοπο.}$$

ii. Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ . Αν ήταν  $f(x_1) \geq f(x_2)$  τότε:

$$\begin{aligned} \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq 0 &\Leftrightarrow \int_{f(x_2)}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt + \int_0^{f(x_1)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^{f(x_1)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq - \int_{f(x_2)}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &\Leftrightarrow \int_0^{f(x_1)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \int_0^{f(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο.} \end{aligned}$$

Άρα,  $f(x_1) < f(x_2)$ , που σημαίνει ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η ανίσωση γράφεται  $\int_0^{f(\kappa^2+2)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt > \int_0^{f(3\kappa)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$  (1)

Από την υπόθεση η (1) είναι ισοδύναμη με την  $f(\kappa^2+2) > f(3\kappa)$  και

αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, με την

$$\kappa^2 + 2 > 3\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - 3\kappa + 2 > 0 \Leftrightarrow \kappa < 1 \text{ ή } \kappa > 2.$$

γ. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt}$

Με την αντικατάσταση  $f(x) = u$ , είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

δηλαδή  $u \rightarrow 0$  και το τελευταίο όριο γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt} \quad (2)$$

Η  $g(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, άρα

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = g(0) \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = 0.$$

Έτσι, το όριο (2) είναι της μορφής  $\frac{0}{0}$  και από τον κανόνα De L' Hospital

προκύπτει

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u)'}{\left(\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt\right)'} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}} = 1$$

οπότε  $f'(0) = 1$ .

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 3ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

## ΘΕΜΑ 1ο

- A. i. Θεωρία  
ii.  $\Lambda - \Lambda - \Sigma$
- B. i. Θεωρία  
ii.  $\Lambda - \Lambda$

## ΘΕΜΑ 2ο

α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ , οπότε υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2$  με  $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ ,  $\xi_2 \in (x_2, x_3)$  ώστε  $f'(\xi_1) = 0$  και  $f'(\xi_2) = 0$ . Είναι φανερό ότι  $\xi_1 < \xi_2$ .  
Επειδή  $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$  η  $f'$  ως δευτέρου βαθμού έχει το πολύ δύο ρίζες, τα είναι  $\xi_1 < \xi_2$  είναι μοναδικά και εκατέρωθεν τους η  $f'$  αλλάζει πρόσημο, άρα, η  $f$  παρουσιάζει ακρότατα σ' αυτά.

β) Από το (α) ερώτημα η  $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$  έχει δύο ρίζες άνισες, τις  $\xi_1 < \xi_2$ . Έτσι η διακρίνουσά της είναι θετική:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 3\beta$$

γ) Είναι  $f''(x) = 6x + 2\alpha$ , οπότε

$$\begin{aligned} f''(\xi_1) + f''(\xi_2) &= 6\xi_1 + 2\alpha + 6\xi_2 + 2\alpha \\ &= 6(\xi_1 + \xi_2) + 4\alpha && \text{Vieta : } \xi_1 + \xi_2 = -\frac{2\alpha}{3} \\ &= 6\left(-\frac{2\alpha}{3}\right) + 4\alpha = 0 \end{aligned}$$

δ) Επειδή  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ , από το θεώρημα του Rolle για την  $f'$  στο διάστημα  $[\xi_1, \xi_2]$ , υπάρχει  $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$  με  $f''(x_0) = 0$ . Επειδή η  $f''(x) = 6x + 2\alpha$  είναι πρώτου βαθμού, εκατέρωθεν του  $x_0$  αλλάζει πρόσημο, άρα για  $x = x_0$  η  $f$  έχει σημείο καμπής το  $(x_0, f(x_0))$ .

## ΘΕΜΑ 3ο

Πρώτα βρίσκουμε τον τύπο της  $f(x)$ . Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2 = |x-\alpha-i\beta|^2 - |x+\alpha-i\beta|^2 \\ &= \frac{(x-\alpha)^2 + \beta^2 - [(x+\alpha)^2 + \beta^2]}{x^2 + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{-4\alpha x}{x^2 + \alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{4\alpha x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{4\alpha}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{4\alpha x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{4\alpha}{x} \right) = 0$$

β) Η υπόθεση  $|z+1| > |z-1|$  δίνει  $|\alpha + i\beta + 1| > |\alpha + i\beta - 1|$  ή

$$\sqrt{(\alpha+1)^2 + \beta^2} > \sqrt{(\alpha-1)^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \alpha > 0$$

Η  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = -4\alpha \frac{(x)'(x^2+\alpha^2+\beta^2) - x(x^2+\alpha^2+\beta^2)'}{(x^2+\alpha^2+\beta^2)^2} = -4\alpha \frac{-x^2+\alpha^2+\beta^2}{(x^2+\alpha^2+\beta^2)^2}$$

$$\text{ή} \quad f'(x) = 4\alpha \frac{x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{(x^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2}, \alpha > 0$$

Το πρόσημο της  $f'$  με τη μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$ , φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$		
$f(x)$	$0$	$\nearrow$	$\boxed{M}$	$\searrow$	$\boxed{-M}$	$\nearrow$	$0$

$$\text{όπου,} \quad M = f(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \mu\epsilon \quad M > 0$$

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι η επόμενη ένωση διαστημάτων

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) \right] \cup \left[ f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}), f(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) \right] \cup \left[ f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \\ &= (0, M] \cup [-M, M] \cup [-M, 0) = [-M, M] \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  έχει ολικό μέγιστο τον αριθμό  $M$  και ολικό ελάχιστο τον  $-M$ .

γ) Για  $\alpha > 0$  στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε  $f(\mathbb{R}) = [-M, M]$

$$\text{ή} \quad f(\mathbb{R}) = \left[ -\frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2} \right]$$

$$\text{Όμοια για } \alpha < 0 \text{ προκύπτει } f(\mathbb{R}) = \left[ \frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}, -\frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2} \right].$$

$$\text{Τέλος, } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ δηλαδή η } f \text{ έχει μοναδική ρίζα } x=0$$

## ΘΕΜΑ 4ο

**A. i)** Επειδή  $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1}$  είναι  $3f'(x)f^2(x) + f'(x) = 1$  ή

$$[f^3(x) + f(x)]' = (x)' \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x + c$$

Η τελευταία ισότητα για  $x=0$  δίνει  $c=2$  οπότε  $f^3(x) + f(x) = x + 2$

**ii)** Η εξίσωση  $y = f(x)$  δίνει:

$$y^3 + y = x + 2 \Leftrightarrow x = y^3 + y - 2, \quad y \in \mathbb{R}$$

οπότε, από την μοναδικότητα της λύσης  $x$ , προκύπτει ότι η  $f$  είναι “1-1” και άρα, έχει αντίστροφη την:

$$f^{-1}(x) = x^3 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**iii)** Επειδή  $f^{-1}(0) = -2$  είναι ισοδύναμα:  $f(-2) = 0$ .

**B.** Η  $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως λόγος παραγωγίσιμων



$$\text{συναρτήσεων με :} \quad f''(x) = \frac{-6f'(x) \cdot f(x)}{[3f^2(x)+1]^2}$$

Επειδή  $f'(x) > 0$  το πρόσημο της  $f''$  εξαρτάται μόνο από την  $f(x)$ . Η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα και από το Α.iii) έχει ρίζα το  $-2$ . Έτσι:

$$\text{με } x < -2 \text{ είναι } f(x) < f(-2) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

$$\text{με } x > -2 \text{ είναι } f(x) > f(-2) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$$

Το πρόσημο της  $f''$  με την κυρτότητα της  $f$  φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f(x)		<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	

Η  $f$  έχει σημείο καμπής το  $(-2, 0)$

Γ. Το ζητούμενο εμβαδόν  $E$  ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 f(x) dx \quad [x \geq -2 \Leftrightarrow f(x) \geq 0]$$

Θέτουμε  $f(x) = u \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$  τότε

$$dx = [f^{-1}(u)]' du = (u^3 + u - 2)' du = (3u^2 + 1) du$$

Τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι τα  $f(0) = 1$ ,  $f(-2) = 0$ .

Τότε

$$E = \int_0^1 u(3u^2 + 1) du = \int_0^1 (3u^3 + u) du = \left[ \frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{4} \text{ τ.μ.}$$