ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

● ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Για να βρούμε τη δύναμη i^{κ} (κ ακέραιος) διαιρούμε το κ με το 4 και σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης ισχύει κ = 4ρ + υ, υ = 0,1,2,3, οπότε $i^{\kappa} = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} \cdot i^{\upsilon} = i^{\upsilon}$

2. Για να δείξουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός z είναι:

● **πραγματικός,** αρκεί να δείξουμε ότι:	● **φανταστικός,** αρκεί να δείξουμε ότι:
α. $\mathrm{Im}(z) = 0$	**α.** $\mathrm{Re}(z) = 0$
β. $z = \bar{z}$	**β.** $z = -\bar{z}$
γ. $z^2 = \|z\|^2$	**γ.** $z^2 = -\|z\|^2$

3. Όταν έχουμε να αποδείξουμε μία ισότητα (ή ανισότητα) με μέτρα μιγαδικών αριθμών, πολύ χρήσιμες είναι οι παρακάτω σχέσεις:

α. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ **β.** $\big||z| - |w|\big| \le |z \pm w| \le |z| + |w|$ **γ.** $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

4. Αν $z = x + yi$ τότε $\mathbf{z + \bar{z} = 2x = 2Re(z)}$ **και** $\mathbf{z - \bar{z} = 2yi = 2Im(z) \cdot i}$

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η ισότητα $\mathbf{z\bar{w} + \bar{z}w = 2Re(z\bar{w})}$, που αποδεικνύεται ως εξής:

$$z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

5. Για να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων ενός μιγαδικού αριθμού z, θέτουμε $z = x + yi$ και καταλήγουμε σε μία εξίσωση ευθείας, κύκλου, έλλειψης, κλπ. Για το μέγιστο ή ελάχιστο μέτρο του μιγαδικού αριθμού z ενός γεωμετρικού τόπου εργαζόμαστε ως εξής:

● Αν ο γεωμετρικός τόπος είναι **κύκλος**, φέρνουμε τη διάμετρο ΑΒ που διέρχεται από το Ο(0,0). Αν Α είναι το πλησιέστερο σημείο στο Ο τότε το μήκος του **ΟΑ** είναι το **ελάχιστο** μέτρο και το μήκος του **ΟΒ** το **μέγιστο.**

● Αν ο γεωμετρικός τόπος είναι **ευθεία,** τότε μπορούμε να έχουμε μόνο ελάχιστο μέτρο και είναι η απόσταση του Ο(0,0) από την ευθεία.(Εναλλακτικά, θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = |z|$ και βρίσκουμε την **ελάχιστη τιμή** της συνάρτησης).

6. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ είναι κορυφές **ισοπλεύρου τριγώνου,** αρκεί να δείξουμε ότι: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

● ΑΝΑΛΥΣΗ

Α. Συναρτήσεις

1. Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι «1 -1», αρκεί να δείξουμε ότι:

α. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ή $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

β. Η f είναι γνησίως μονότονη (συνήθως με παράγωγο)

2. α) Για μια αντιστρέψιμη συνάρτηση f ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

Για παράδειγμα μπορεί να δίνεται $f(0)=\alpha$ και να μας ζητούν να βρούμε τις ρίζες της αντίστροφης συνάρτησης. Τότε, απ' τον ορισμό $f^{-1}(\alpha)=0$ κι επειδή η f^{-1} είναι 1–1 η μοναδική της ρίζα θα είναι το α.

β) Όταν ζητείται ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x (αφού έχουμε πρώτα αποδείξει ότι η f είναι 1–1). Να θυμάστε ότι πρέπει να βρείτε και το **πεδίο ορισμού** της f^{-1}, που είναι **το σύνολο τιμών** $f(A)$ της f (όπως επίσης το πεδίο ορισμού A της f είναι το σύνολο τιμών της f^{-1}).

γ) Να θυμάστε ακόμα ότι σε περίπτωση που οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων τέμνονται, τότε το κοινό τους σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$.

3. α) Για να ορίσουμε τις συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$ χρειαζόμαστε υποχρεωτικά και τα πεδία ορισμού τους. Γενικά, $f\circ g\neq g\circ f$

β) Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι σχέσεις $f^{-1}(f(x))=x$ και $f(f^{-1}(x))=x$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ ΤΗ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΑ!!! Στην πρώτη περίπτωση $\mathbf{x\in A}$, ενώ στη δεύτερη $\mathbf{x\in f(A)}$. Έτσι είναι **λάθος** να πούμε ότι $f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$**,** επειδή κατά κανόνα τα πεδία ορισμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Β. Όρια – συνέχεια συναρτήσεων

1. α) Για τα όρια απροσδιόριστων μορφών χρησιμοποιούμε τους κανόνες **De L' Hospital μόνο** αν είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ ή μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε αυτές τις μορφές, και οι συναρτήσεις είναι **παραγωγίσιμες.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: i) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$ Εδώ η μορφή είναι $(-\infty/0)$ οπότε δεν εφαρμόζονται οι κανόνες **De L' Hospital** και το όριο υπολογίζεται ως εξής:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

● Αν το όριο είναι απροσδιόριστης μορφής 0/0 ή ∞/∞ αλλά δεν γνωρίζουμε αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, τότε

αντί για τον τύπο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, χρησιμοποιούμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$

β) Προσοχή στη διαφορά !!! $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}$ **και** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ημx}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$**,** ενώ για τη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιούμε το **κριτήριο παρεμβολής.**

$\left|\frac{ημx}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{ημx}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$ κι επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$, θα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}=0\ ■$$

γ) Για τα όρια συναρτήσεων της μορφής $f(x)=\sqrt{αx^2+βx+γ}\pm(κx+λ)$, στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ δεν εφαρμόζονται οι κανόνες **De L' Hospital**. Σε αυτές τις περιπτώσεις παίρνουμε **συζυγή παράσταση μόνο** αν καταλήξουμε στην **απροσδιόριστη μορφή** $\mathbf{0\cdot(\pm\infty)}$**.** Σε κάθε άλλη περίπτωση το όριο θα βγει $+\infty$ ή $-\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-3x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3\right)=(+\infty)\cdot(-2)=-\infty$$

● **Να θυμάστε ότι:** $\sqrt{αx^2+βx+γ}=|x|\sqrt{α+\frac{β}{x}+\frac{γ}{x^2}}$ **,** $α\neq 0$

$|x|=x$, όταν $x\to+\infty$**, ενώ** $|x|=-x$**,** όταν $x\to-\infty$

2. Έστω δύο συναρτήσεις f,g. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν **τουλάχιστον** ένα κοινό σημείο στο [α, β], αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(α,β)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=g(x_o)$. Τότε χρησιμοποιούμε το θεώρημα του **Bolzano**.

Δηλαδή, θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και αποδεικνύουμε ότι:

● η h είναι συνεχής στο [α, β]

● $h(α)\cdot h(β)<0$

Γ. Παράγωγοι συναρτήσεων

1. Το πρόβλημα της εφαπτομένης

Α. Η ευθεία **ε:** $\mathbf{y=λx+β}$ είναι **εφαπτομένη** στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $M(x_o,y_o)$, όταν $\mathbf{y_o=f(x_o)}$ και $\mathbf{f'(x_o)=λ}$

● Αν $ε\parallel x'x\Rightarrow f'(x_o)=0$

● Αν $\varepsilon \parallel \varepsilon_1 : y = \lambda x + \kappa \Rightarrow f'(x_o) = \lambda$

● Αν $\varepsilon \perp \varepsilon_1 : y = \lambda x + \kappa \Rightarrow f'(x_o) = -\dfrac{1}{\lambda}$

Β. Όταν οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $M(x_o, y_o)$, τότε: $\mathbf{f(x_o) = g(x_o) = y_o}$ και $\mathbf{f'(x_o) = g'(x_o)}$

2. Το πρόβλημα της ύπαρξης ρίζας

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **τουλάχιστον** μία πραγματική ρίζα, τότε αυτό μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

α) Αποδεικνύουμε ότι ισχύει το θεώρημα του **Bolzano** για ένα κατάλληλο διάστημα [α, β], οπότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

β) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f. Αν $0 \in f(A)$, τότε η f έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

γ) Εντοπίζουμε τη ρίζα αν είναι προφανής, πχ $f(x) = e^x - x - 1$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $f(0) = 0$

δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του **Rolle** για μια αρχική συνάρτηση (παράγουσα) της f

πχ Να δείξετε ότι η εξίσωση $4(\beta - \alpha)x^3 + 3\alpha x^2 - \beta = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0, 1).

Έστω $f(x) = 4(\beta - \alpha)x^3 + 3\alpha x^2 - \beta$. Μία παράγουσα της f είναι η $F(x) = (\beta - \alpha)x^4 + \alpha x^3 - \beta x$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0,1]. Εξάλλου, $F(0) = F(1) = 0$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f(\xi) = 0}$ ■

3. Το πρόβλημα της μοναδικότητας της ρίζας

Αυτό αντιμετωπίζεται με δύο μεθόδους:

Α. Η μέθοδος της **απαγωγής σε άτοπο**, σε συνδυασμό με το θεώρημα του **Rolle**

● Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2$, οπότε θα είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

● Εφαρμόζουμε το θεώρημα του **Rolle** στο [ρ1, ρ2], οπότε για κάποιο $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ θα είναι $\mathbf{f'(\xi) = 0}$

● Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι **αδύνατη** στο (ρ_1, ρ_2) και έτσι καταλήγουμε σε **άτοπο.**

Β. Η μέθοδος της **μονοτονίας**

Επειδή «**κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1–1**», αν αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα και στη συνέχεια ότι $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$, τότε η ρίζα αυτή θα είναι **μοναδική**.

4. Η απόδειξη ανισοτικών σχέσεων

Α. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq 0$ ή ($f(x) \leq 0$) τότε χρησιμοποιούμε **μονοτονία** ή **ακρότατα.** Πιο συγκεκριμένα:

● Μετατρέπουμε την ανισοτική σχέση στη μορφή $f(x) \geq f(x_o)$ ή $f(x) \leq f(x_o)$ και στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι παρουσιάζει στο x_o **μέγιστο** ή **ελάχιστο** αντίστοιχα.

● Αν η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως μονότονη, τότε αν για παράδειγμα είναι γνησίως αύξουσα στο [α, β], θα ισχύει $f(\alpha)<f(x)<f(\beta)$. Ανάλογα εργαζόμαστε αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu x<x$ **για κάθε** $x>0$

Έστω $f(x)=\eta\mu x-x$, $x>0$

$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1\leq 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε θα έχουμε:

$x>0\Rightarrow f(x)<f(0)\Leftrightarrow \eta\mu x-x<0\Leftrightarrow \boldsymbol{\eta\mu x<x}$ ■

● Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που δίνεται ότι $f(x)\geq f(x_o)$ (ή $f(x)\leq f(x_o)$) για κάθε $x\in\Delta$, και ζητείται να βρούμε την τιμή μιας παραμέτρου. Τότε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_o, από το θεώρημα του **Fermat** θα ισχύει: $\mathbf{f'(x_o)=0}$. Από τη λύση αυτής της εξίσωσης καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Β. Στην περίπτωση που έχουμε να αποδείξουμε μία διπλή ανισότητα σε ένα διάστημα (α, β), χρησιμοποιούμε συνήθως το **ΘΜΤ** του διαφορικού λογισμού. Πιο συγκεκριμένα:

● Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο [α, β] και καταλήγουμε στο ζητούμενο με τη βοήθεια των σχέσεων $\boldsymbol{\alpha<\xi<\beta}$ και $\mathbf{f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}$

5. Ακρότατα – Σημεία καμπής

Α. Να θυμάστε ότι αναζητούμε τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων ανάμεσα

● στα σημεία όπου **μηδενίζεται** η **πρώτη** παράγωγος

● στα σημεία όπου **δεν υπάρχει** η **πρώτη** παράγωγος

● στα άκρα α, β ενός κλειστού διαστήματος [α, β].

Για να έχουμε ακρότατο σε ένα σημείο x_o θα πρέπει **να αλλάζει η μονοτονία** της συνάρτησης **εκατέρωθεν** του x_o

Β. Αναζητούμε τις πιθανές θέσεις των σημείων καμπής ανάμεσα

● στα σημεία όπου **μηδενίζεται** η **δεύτερη** παράγωγος

● στα σημεία όπου **δεν υπάρχει** η **δεύτερη** παράγωγος

Για να έχουμε θέση σημείου καμπής σε ένα σημείο x_o πρέπει **να αλλάζει η μονοτονία** της **πρώτης** παραγώγου **εκατέρωθεν** του x_o και η γραφική παράσταση της συνάρτησης να **δέχεται εφαπτομένη** στο σημείο με τετμημένη x_o. (Στην περίπτωση που δεν έχουμε κατακόρυφη εφαπτομένη, η τελευταία αυτή παρατήρηση πρακτικά σημαίνει, ότι η συνάρτηση πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο x_o).

6. Το πρόβλημα του «υπάρχει τουλάχιστον ένα»

Αν σε μία άσκηση ζητείται να αποδειχθεί ότι «υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε...», τότε το μυαλό μας πάει αυτόματα σε τρία βασικά θεωρήματα:

● Θεώρημα **Bolzano**

● Θεώρημα **Rolle**

● Θεώρημα **Μέσης Τιμής** του Διαφορικού Λογισμού

Δ. Ολοκληρώματα

1. Εύρεση τύπου συνάρτησης

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι παρακάτω προτάσεις:

- Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση f είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα Δ
- Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε $\mathbf{f(x)=g(x)+c}$, $c\in\mathbb{R}$ σε όλο το Δ.
- Ισχύει η ισοδυναμία $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$, $c\in\mathbb{R}$

Το ζητούμενο είναι να καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής

$$f'(x)=g'(x) \quad \text{απ' όπου} \quad f(x)=g(x)+c$$

και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τον πραγματικό αριθμό c. Παρακάτω αναφέρουμε κάποια τεχνάσματα για να βρίσκουμε τον τύπο μιας συνάρτησης:

α) Αν δίνεται μία σχέση της μορφής $\mathbf{f(x)\cdot f'(x)=...}$ ή $\mathbf{\dfrac{f'(x)}{f(x)}...}$ τότε υπενθυμίζουμε ότι:

$$f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}[f^2(x)]' \quad \text{και} \quad \frac{f'(x)}{f(x)}=[\ln|f(x)|]'$$

β) Αν δίνεται μία σχέση της μορφής $\mathbf{f(x)+f'(x)=...}$ τότε **πολλαπλασιάζουμε** και τα δύο μέλη της ισότητας με $\mathbf{e^x}$, έτσι ώστε το πρώτο μέλος να γίνει:

$$e^x[f(x)+f'(x)]=(e^x)'\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=\mathbf{[e^x\cdot f(x)]'}$$

γ) Αν δίνεται μία σχέση της μορφής $\mathbf{f'(x)-f(x)=...}$ τότε **διαιρούμε** και τα δύο μέλη της ισότητας με $\mathbf{e^x}$, έτσι ώστε το πρώτο μέλος να γίνει:

$$\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=\frac{e^x[f'(x)-f(x)]}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot f'(x)-(e^x)'\cdot f(x)}{e^{2x}}=\left(\mathbf{\frac{f(x)}{e^x}}\right)'$$

δ) Αν δίνεται μία σχέση της μορφής $\mathbf{f(x+y)=...}$, τότε **παραγωγίζουμε** και τα δύο μέλη της ισότητας σύμφωνα με τον τύπο $\mathbf{f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

2. Συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα

α) Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη από ολοκλήρωμα τότε για να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη στηριζόμενοι στη σχέση $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)$:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f **που δίνεται από τη σχέση**

$$f(x)=x\ln x+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt,\ x>0$$

Έχουμε $f(x)-x\ln x=\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow xf(x)-x^2\ln x=\int_1^x f(t)dt$

$$[xf(x)-x^2\ln x]'=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'\Rightarrow f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x=f(x)$$

$xf'(x)=2x\ln x+x \Leftrightarrow f'(x)=2\ln x+1$, απ' όπου έχουμε

$f(x)=\int(2\ln x+1)dx=...=2x\ln x-x+c$ (Να αποδειχτεί)

Είναι όμως $f(1)=\ln 1+\int_1^1 f(t)dt \Leftrightarrow f(1)=0$. Άρα $0=c-1 \Leftrightarrow c=1$

Επομένως, $\mathbf{f(x)=2x\ln x-x+1}$ ■

β) Υπενθυμίζουμε ότι: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)'=f(g(x))\cdot g'(x)$

Αυτός ο γενικός τύπος μας βοηθάει να βρούμε τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης που ορίζεται από ολοκλήρωμα.

γ) ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Για να υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, πρέπει η συνάρτηση f να είναι **συνεχής** στο **[α, β].** Για παράδειγμα **δεν μπορούμε** να γράψουμε $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ αφού η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ **δεν ορίζεται** στο $\mathbf{0}\in$ **[-1, 1]**

δ) ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Το ολοκλήρωμα που ορίζεται ως $\int_{\alpha}^{x} f(x)dt$ είναι **συνάρτηση** και όχι **αριθμός**, όπως το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$. Επομένως, εξαρτάται από τη μεταβλητή $\mathbf{dt}$. Οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή μέσα στο ολοκλήρωμα θεωρείται **σταθερός αριθμός** και μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – 1: $F(x)=\int_0^x x^2e^{-t}dt=x^2\int_0^x e^{-t}dt$

Αν όμως τώρα παραγωγίσουμε, το x θα συμπεριφερθεί ως μεταβλητή. Δηλαδή:

$F'(x)=(x^2)'\int_0^x e^{-t}dt+x^2\left(\int_0^x e^{-t}dt\right)'=2x\int_0^x e^{-t}dt+x^2\cdot e^{-x}$ ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – 2: Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f που δίνεται από τη σχέση $\int_0^x e^t f(x-t)dt=\eta\mu^2 x$

Θέτουμε $x-t=u \Rightarrow -dt=du$ (παρατηρήστε ότι ο x είναι σταθερός, οπότε $x'=0$)
Οπότε, $t=x-u$ και για $t=0 \Leftrightarrow u=x$, $t=x \Leftrightarrow u=0$.

Άρα έχουμε $\int_0^x e^t f(x-t)dt=\int_x^0 e^{x-u}f(u)(-du)=\int_0^x e^x\cdot e^{-u}f(u)du=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du$

Είναι τώρα $e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du=\eta\mu^2 x \Leftrightarrow \int_0^x e^{-u}f(u)du=e^{-x}\eta\mu^2 x$ και παραγωγίζοντας

$e^{-x}f(x)=-e^{-x}\eta\mu^2 x+e^{-x}(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow f(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x$, απ' όπου

$$\mathbf{f(x)=\eta\mu 2x-\eta\mu^2 x},\ x\in\mathbb{R}\ ■$$