# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ (μέτριας δυσκολίας)

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_0^1 e^{x^2 t}\, dt \ , \ x \in \mathbb{R}$

**Α.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης F για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

**Γ.** Να δείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την $F'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ.** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

**Ε.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

## Λύση:

**Α.** Έστω $u = x^2 t$ απ' όπου προκύπτει ότι $du = x^2 dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{x^2}$ και για $t = 0 \Rightarrow u = 0$,

$t = 1 \Rightarrow u = x^2$. Άρα, $\int_0^1 e^{x^2 t} dt = \dfrac{1}{x^2}\int_0^{x^2} e^u du = \dfrac{1}{x^2}\left[e^u\right]_0^{x^2} = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$

Επομένως $\mathbf{F(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}}$**, για κάθε** $\mathbf{x \in \mathbb{R}^*}$

Από την $F(x) = \int_0^1 e^{x^2 t}\, dt \Rightarrow F(0) = \int_0^1 dt = 1 \Leftrightarrow \mathbf{F(0) = 1}$

Έτσι, έχουμε $\mathbf{F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}}$ ■

**Β.** $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2xe^{x^2}}{2x} = e^0 = 1 = F(0)$. Άρα **η** F **είναι συνεχής στο 0** ■

**Γ.** Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$F'(x) = \frac{2xe^{x^2}\cdot x^2 - 2x\ e^{x^2}-1}{x^4} = \frac{2x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2} + 2}{x^3} \Rightarrow \mathbf{F'(x) = \frac{2\ x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{x^3}}, \ x \neq 0$$

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}-2}{3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4xe^{x^2}}{3} = 0$$

(Εφαρμόσαμε διαδοχικά τον κανόνα του De l' Hospital). Άρα $\mathbf{F'(0) = 0}$ ■

**Δ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$ . Έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ και εφαρμόζουμε διαδοχικά τον κανόνα του De l'Hospital. Το ζητούμενο όριο γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{3x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4xe^{x^2}}{3}=+\infty$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{\frac{F(x)}{x}}=+\boldsymbol{\infty}$ ■

**Ε.** Αρκεί να δείξουμε ότι $F'(x)>0$, για κάθε x>0, ή ισοδύναμα ότι: $x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1>0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1$, που είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

$g'(x)=2xe^{x^2}+x^2\cdot 2xe^{x^2}-2xe^{x^2}=2x^3e^{x^2}>0$, για κάθε $x>0$. Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x\geq 0\Rightarrow g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ (αφού $g(0)=0$)

Επομένως, η συνάρτηση **F είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+ ∞ )** ■