***ΖΗΤΗΜΑ***
Δίνεται συνάρτηση $f$ δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα $(0,+\infty)$.

**i)** Να αποδείξετε ότι $f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1\neq x_2$.

**ii)** Αν επιπλέον η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και $f(1)=\frac{1}{2}$ τότε $f(\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)>1$ για κάθε $\alpha>1$.

**iii)** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(1+\frac{1}{t}\right)e^t\,dt>x-\frac{1}{x}$$

για κάθε $x>1$.

*[Ε.Μ.Ε, Παράρτημα Μεσσηνίας]*

***ΛΥΣΗ***
**i)** Έχουμε ισοδύναμα ως προς την αποδεικτέα:

$$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Leftrightarrow-\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\right]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_2)\quad(1)$$

Εν' όψει της τελευταίας θεωρούμε την $f$ στα διαστήματα $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$, σε καθένα από τα οποία πληροί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ του Διαφορικού Λογισμού (γιατί;). Άρα θα υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}=2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)f'(\xi_1)\quad(2)$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=2\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_2)=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)f'(\xi_2)\quad(3)$$

Εισάγοντας τις (2) και (3) στην (1) έχουμε:

$$-(x_2-x_1)f'(\xi_1)>-(x_2-x_1)f'(\xi_2)\overset{x_2>x_1}{\Longleftrightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$$

η οποία ισχύει διότι αφού η $f$ είναι κυρτή (και υπάρχει η $f''$) έπεται ότι $f''(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, οπότε η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και φανερά $\xi_1<\xi_2$.

**ii)** Από το ερώτημα i) για $x_1 = a$ και $x_2 = \frac{1}{a}$. με $a > 1$[1], προκύπτει:

$$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) > 2f\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right) \quad (4)$$

Επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα και

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 1 \Rightarrow \frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq 1 \Rightarrow f\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right) \geq f(1) \Rightarrow f\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2f\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right) \geq 1$$

λόγω της οποίας η (4) δίνει:

$$\boxed{f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) > 1, \forall a > 1}$$

**iii)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = \frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^t dt - x + \frac{1}{x}$$

Κατά τα γνωστά έχουμε ότι η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με:

$$g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left[h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right], x \in [1, +\infty) \quad (5)$$

όπου $h(x) = \frac{1}{2e}e^x, x \in [1, +\infty)$.

Παρατηρούμε πλέον ότι για την $h$:

- $h(1) = \frac{1}{2}$
- $h'(x) = \frac{1}{2e}e^x > 0, \forall x \in [1, +\infty)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- $h''(x) = \frac{1}{2e}e^x > 0, \forall x \in [1, +\infty)$, οπότε είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$

Επομένως με βάση το ερώτημα ii) θα είναι: $h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) > 1 \Leftrightarrow h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) - 1 > 0, \forall x \in (1, +\infty)$. Λόγω της τελευταίας ανισότητας από την (5) έπεται ότι $g'(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$ και επομένως η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Άρα για:

[1] Φανερά για $a > 1$ οι αριθμοί $a$ και $\frac{1}{a}$ δεν είναι ίσοι μεταξύ τους, άρα η προϋπόθεση $x_1 \neq x_2$ του ερωτήματος i) ικανοποιείται εκλέγοντας $x_1 = a$ και $x_2 = \frac{1}{a}$.

$$x>1 \Longrightarrow g(x)>g(1) \Longrightarrow g(x)>0 \Longrightarrow \frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^t dt - x + \frac{1}{x} > 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^t dt > x - \frac{1}{x}, x \in (1,+\infty)}$$

***Παρατήρηση***

Εύκολα βλέπουμε ότι για $x=1$ η αποδεικτέα ισχύει ως ισότητα. Επομένως μπορούμε να γενικεύσουμε το συμπέρασμα στην ανισοϊσότητα:

$$\frac{1}{2e}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^t dt \geq x - \frac{1}{x}, x \in [1,+\infty)$$

Επιμέλεια
**Γιάννης Γ. Ψυχογιός**
www.jpsihogios.gr