

ΘΕΜΑ 1^ο

1.Α. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο του x και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και $u(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-\rho)$, τότε :

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-\rho)$.

Μονάδες 2,5

β) Το υπόλοιπο $u(x)$ είναι :

Α. Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το $P(x)$.

Β. Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Γ. Σταθερό πολυώνυμο.

Δ. Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο.

Μονάδες 5

γ) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-\rho)$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $u=P(\rho)$.

Μονάδες 5

1.Β. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = k^2x^3 - 3kx^2 + kx + 1$,

όπου k πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)$ είναι ίσο με το μηδέν.

A. $k = 0$, B. $k = -1$, Γ. $k = 1$,
Δ. $k = 2$, Ε. $k = -2$

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2°

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος όρος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι :

A. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = -1/2$

B. $\alpha_1 = -64$ και $\lambda = -1/2$

Γ. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = 1/2$

Δ. $\alpha_1 = 32$ και $\lambda = 1/2$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3°

α) Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 6x + \eta\mu 4x + 4\eta\mu 5x = 0$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4^ο

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές.

Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής :

- Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω .

Μονάδες 5

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω .

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή του ω .

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

Μονάδες 5

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Μονάδες 5

Σημείωση : Για τις ερωτήσεις **1.Α.β)**, **1.Β.** και **2.α)** να γράψετε τον αριθμό της κάθε ερώτησης στο τετράδιό σας και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δε θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο a_n μιας αριθμητικής προόδου (a_n), που έχει πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .
Μονάδες 3

A.2. Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ έτσι, ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
Μονάδες 3

A.3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_n των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου (a_n), που έχει πρώτο όρο a_1 και λόγο $\lambda \neq 1$,

είναι: $S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$ Μονάδες 6,5

B.1. Στη **Στήλη Α** δίνεται ο πρώτος όρος a_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη **Στήλη Β** ο νιοστός όρος a_n τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $a_1=1, \omega=-2$	1. $a_n=-n$
β. $a_1=0, \omega=3$	2. $a_n=4n-3$
γ. $a_1=-1, \omega=-1$	3. $a_n=3-2n$
	4. $a_n=3n-3$

Μονάδες 6

B.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Οι αριθμοί $-5, 5, 15$, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου $10, 7, 4, \dots$ είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο $(α_v)$ για τους όρους της $α_2, α_4, α_6$ ισχύει η σχέση $2α_4=α_2+α_6$ Μονάδες 4,5

B.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων v όρων της είναι ίσο με:

A. $\frac{2^v - 1}{2}$, B. $2^v - 1$, Γ. 2^{v-1} , Δ. $1 - 2^v$, E. Κανένα από τα προηγούμενα. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος α), να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να μετατρέψετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(2x + \varphi) + k$, όπου ρ, φ, k πραγματικοί αριθμοί και $\rho > 0$. Μονάδες 9

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή. Μονάδες 6

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα.

A. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

B. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό

τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

B.1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό. Μονάδες 8

B.2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A.1.** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$
 με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Μονάδες 6,5

- A.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ και $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$, τότε:

α. $P(x) = (x - \rho) \pi(x) + 1$

β. $\pi(x) = (x - \rho) P(x)$

γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 6

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3 .

Μονάδες 6

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$ **β.** $x - 1$ **γ.** x

δ. $x + \frac{5}{4}$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη γωνία α ισχύει ότι

$$5 \operatorname{csc} 2\alpha - 14 \operatorname{csc} \alpha - 7 = 0 .$$

α. Να δείξετε ότι $\operatorname{csc} \alpha = -\frac{3}{5}$.

Μονάδες 10

- β.** Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ και $\epsilon\phi 2\alpha$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$.

- α.** Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω .

Μονάδες 8

- β.** Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$.

Μονάδες 8

- γ.** Έστω (β_n) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$
,

Μονάδες 10

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με $1/16$ της αρχικής του τιμής,

Μονάδες 8

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $1/9$ της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο $υ$ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $υ = P(\rho)$.

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x$, $\theta > 0$

β. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε θ_1 , $\theta_2 > 0$ ισχύει:
 $\log_{\alpha}(\theta_1\theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$

γ. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

δ. $\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

ε. $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$.

Μονάδες 10

Γ. Πότε μία ακολουθία λέγεται:
α. αριθμητική πρόοδος;

β. γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha_1 = \sin 2\alpha$, $\alpha_2 = \sin^2 \alpha$, $\alpha_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόοδου.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της πρόοδου.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της πρόοδου.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 8

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
 2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
- Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
 4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
 5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
 6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι ο $v^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$.

Μονάδες 7

- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $\log_{\alpha}\theta = x$, τότε:

α. $\alpha^{\theta} = x$ **β.** $x^{\alpha} = \theta$ **γ.** $\alpha^x = \theta$

Μονάδες 3

- Γ.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν S_v συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων v όρων μιας γεωμετρικής προόδου α_v με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1 , τότε είναι:

α. $S_v = \alpha_1 \frac{\lambda-1}{\lambda^v-1}$ **β.** $S_v = \alpha_1 \frac{\lambda^v-1}{\lambda-1}$ **γ.** $S_v = \alpha_1 \frac{1-\lambda^v}{\lambda-1}$

Μονάδες 3

- Δ.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ο τύπος που εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας 2α είναι:

α. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ **β.** $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

γ. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Μονάδες 3

Ε. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:

α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

γ. Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $\alpha \neq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο

Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\sin x (\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sin 2x + 4\sin x + 1) \eta\mu x$$

Μονάδες 12

και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

$$\sin 2x + 4\sin x + 1 = 0 .$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = -11 + 2n$ με πρώτο όρο α_1 καθώς και το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_n είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{21}$, όπου

$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_n .

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου α_n .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και

$$g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1).$$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, $\theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\log_a \theta^k = k \log_a \theta.$$

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 ισχύει

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \frac{\log x_1}{\log x_2}.$$

β) Το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου (α_n) είναι

$$S_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n.$$

γ) Αν $u(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ δια του $\delta(x)$, όπου $\delta(x)$ και $u(x)$ είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του $u(x)$ είναι μικρότερος από τον βαθμό του $\delta(x)$.

δ) Εάν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Μονάδες 4

Γ. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται με ...

α. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\dots}$

όπου $a > 0$, m ακέραιος και n θετικός ακέραιος

β. $a^{\log_a \theta} = \dots$

όπου $\theta > 0$ και $a > 0$ με $a \neq 1$

γ. $\log_a a^x = \dots$

όπου $a > 0$ με $a \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$					
$\sigma\upsilon\nu x$					

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu 2x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = 0.$$

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$$

για όλες τις τιμές του α που ορίζεται η ισότητα.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Μονάδες 4

γ. Για $\alpha = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1}.$$

Μονάδες 13

B. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}.$$

Μονάδες 12

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας μόνο στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 29 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1 .$$

Μονάδες 10

- B.** Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο ;

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

- β.** Στην παραβολή $y^2 = 2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$.

Μονάδες 2

- γ.** Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, k, \lambda$ με $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (k\beta + \lambda\gamma)$.

Μονάδες 2

- δ. Αν Α, Β, Γ είναι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} | \det(\vec{ΑΒ}, \vec{ΑΓ}) |$$

Μονάδες 2

- ε. Η εκκεντρότητα ε της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

- Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Μονάδες 8

- Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x'x.

Μονάδες 8

- Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $a = 12k - 5$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

- Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

- Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4.

Μονάδες 8

- Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (a^2 + 15)(a^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 4y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + 4y + 16 = 0$.

A. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 7

B. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

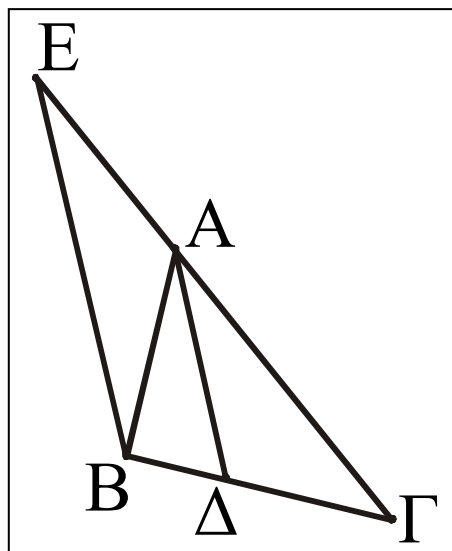
1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο (Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου)

A. Έστω $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Από το B φέρνουμε την παράλληλη προς την $A\Delta$ και έστω E το σημείο τομής της με την ευθεία $A\Gamma$.



α) Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓBE , για τις παράλληλες ευθείες $A\Delta$ και BE .

Μονάδες 5

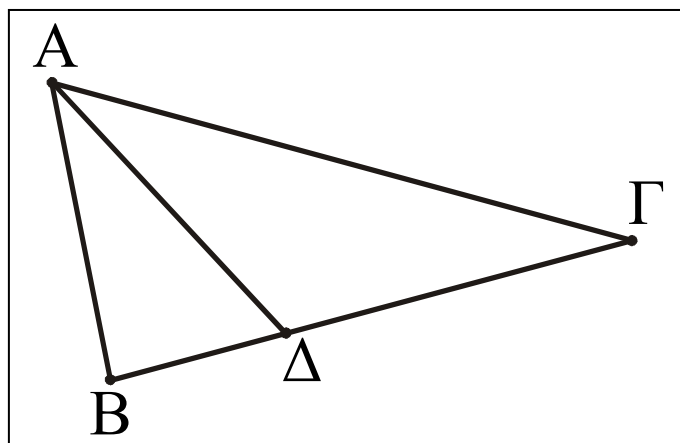
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Μονάδες 3,5

B. α) Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .



Αν $B\Delta = 3$, $\Delta\Gamma = 4$ και $A\Gamma = 10$, τότε η πλευρά AB είναι ίση με:

A. 3, B. 6, Γ. 4, Δ. 5, Ε. 7.

Μονάδες 6,5

β) Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της

γωνίας \hat{A} . Αν $AB=4$, $B\Gamma=6$ και $A\Gamma=8$, τότε:

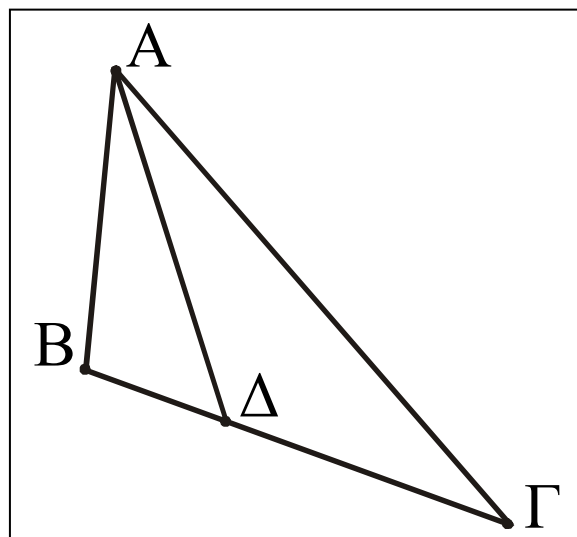
A. $\Delta B=1$ και $\Delta\Gamma=5$

B. $\Delta B=5$ και $\Delta\Gamma=1$

Γ. $\Delta B=3$ και $\Delta\Gamma=3$

Δ. $\Delta B=2$ και $\Delta\Gamma=4$

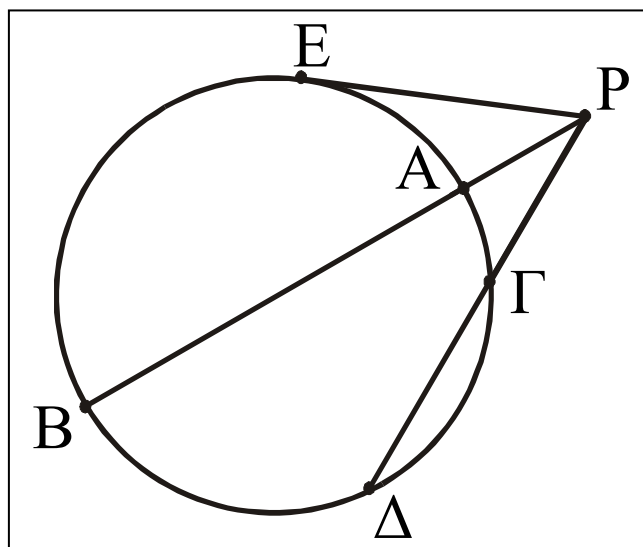
Ε. $\Delta B=4$ και $\Delta\Gamma=2$



Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι PB και $P\Delta$ τέμνουσες αυτού. Αν $AB=9$, $P\Gamma=4$ και $\Gamma\Delta=5$, τότε:



α) Να υπολογίσετε το PA

Μονάδες 15

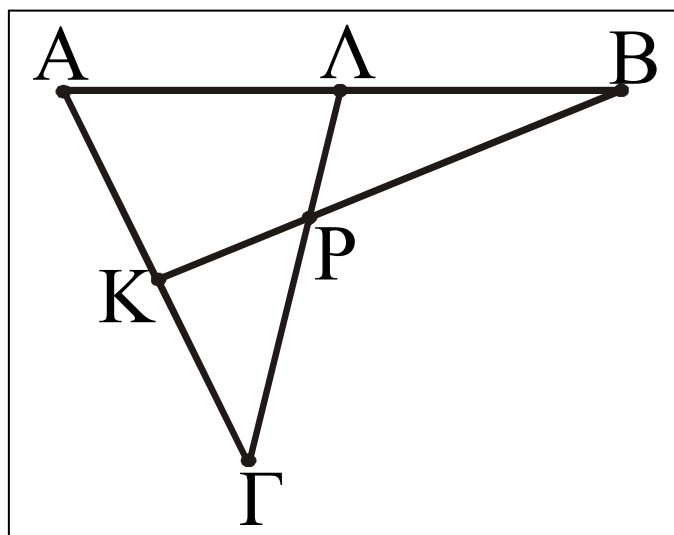
- β) Το ΡΕ είναι ίσο με:
Α. 9, Β. 5, Γ. 4, Δ. 3, Ε. 6.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως.

Να δείξετε ότι:



- α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1.

Μονάδες 15

- β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

- α) Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά $40\sqrt{2}$ μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του κήπου τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

Μονάδες 8

β) Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μία κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

Μονάδες 5

γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση β);

Μονάδες 5

δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

Μονάδες 7

Σημείωση : Για τις ερωτήσεις **1.Β.α)**, **1.Β.β)** και **2.β)** να γράψετε τον αριθμό της κάθε ερώτησης στο τετράδιό σας και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο. Το σχήμα του θέματος 1.Α. να μεταφερθεί στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία ώρα και μισή (1 1/2) μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Μονάδες 10

A2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ να συμπληρώσετε τη σχέση

$$A\Gamma^2 - AB^2 = \dots\dots\dots$$

ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Μονάδες 2,5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

B1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται: $\beta=8$, $\gamma=6$ και $\mu_\alpha=5$. Η πλευρά α είναι ίση με:

A. 7 B. 4 Γ. 10 Δ. 9 Ε. 11

Μονάδες 6,5

B2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\alpha=4$, $\beta=7$, $\gamma=5$, $A\Delta$ το ύψος και AM η διάμεσος. Η προβολή ΔM της διαμέσου AM πάνω στη πλευρά α είναι ίση με:

A. 4 B. 8 Γ. $8/3$ Δ. 5 Ε. 3

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με

$AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB < \Gamma\Delta$, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=4$, $A\Delta=3$, $B\Gamma=5$.

Να υπολογίσετε:

α) την προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $\Delta\Gamma$
Μονάδες 9

β) το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$
Μονάδες 9

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $AB=15$.

Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα R του κύκλου

Μονάδες 6

β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R)

Μονάδες 6

γ) το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 6

δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρος του AB . Από ένα σημείο M του κύκλου, διαφορετικό των A και B , φέρουμε κάθετη στη διάμετρο AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z και τη διάμετρο στο σημείο Δ . Επί της AB θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $O\Gamma=O\Delta$ και φέρουμε τη $M\Gamma$, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B$

Μονάδες 6

$$\beta) \text{ ΜΓ} \cdot \text{ΓΕ} = \text{ΜΔ} \cdot \text{ΔΖ} = \text{R}^2 - \text{ΟΔ}^2 .$$

Μονάδες 6

$$\gamma) \text{ ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = 2(\text{R}^2 + \text{ΟΔ}^2)$$

Μονάδες 5

$$\delta) \frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΓΕ}} + \frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΔΖ}} = 2 \frac{\text{R}^2 + \text{ΟΔ}^2}{\text{R}^2 - \text{ΟΔ}^2}$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
 ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
 ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

A2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A}=90^\circ$) και $ΑΔ$ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $ΑΒ^2$	1. $ΑΒ^2+ΒΓ^2$
β. $ΑΓ^2$	2. $\frac{ΒΔ}{ΓΔ}$
γ. $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2}$	3. $\frac{ΓΔ}{ΒΔ}$
	4. $ΒΓ \cdot ΒΔ$
	5. $ΒΓ^2-ΑΒ^2$
	6. $ΑΒ \cdot ΒΓ$

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος AD , για το οποίο έχουμε $B\Delta = 1$ και $B\Gamma = 3$.

B1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AD είναι:

α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$
Μονάδες 6, 5

B2. Το μήκος της πλευράς AB είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $AB=6$, $B\Gamma=12$ και $\Gamma A=8$.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM .

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου AM στην πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες \hat{xOy} , \hat{yOz} ,

\hat{zOx} έτσι ώστε $\hat{xOy} = \hat{yOz} = 150^\circ$. Στις ημιευθείες Ox , Oy , Oz παίρνουμε τα σημεία A , B , Γ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA=2$, $OB=4$ και $O\Gamma=6$.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{O\Gamma A}$ του τριγώνου $O\Gamma A$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB=2R$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε ένα σημείο Γ , τέτοιο ώστε $B\Gamma=2R$. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓE του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓE στο σημείο Δ .

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E = 2\sqrt{2} R$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma \Delta \cdot \Gamma E$.

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma \Delta$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 5

- δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσσει του R.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) , αν και μόνο αν $\Delta_{(O,R)}^P > 0$, όπου $\Delta_{(O,R)}^P$ η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) .

Μονάδα 1

β. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} < 90^\circ.$$

Μονάδα 1

γ. Το εμβαδόν E κάθε τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται

$$\text{από τον τύπο } E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu B.$$

Μονάδα 1

δ. Σε κύκλο (O, R) , το εμβαδόν E κυκλικού

$$\text{τομέα } \mu^\circ \text{ δίνεται από τον τύπο } E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}.$$

Μονάδα 1

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ εκφράζεται από τον τύπο:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2} .$$

Μονάδα 1

Β. α. Να εγγραφεί κανονικό εξαγώνο σε κύκλο (O, R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$. Αν ισχύει η σχέση

$$2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} ,$$

α. να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

Μονάδες 15

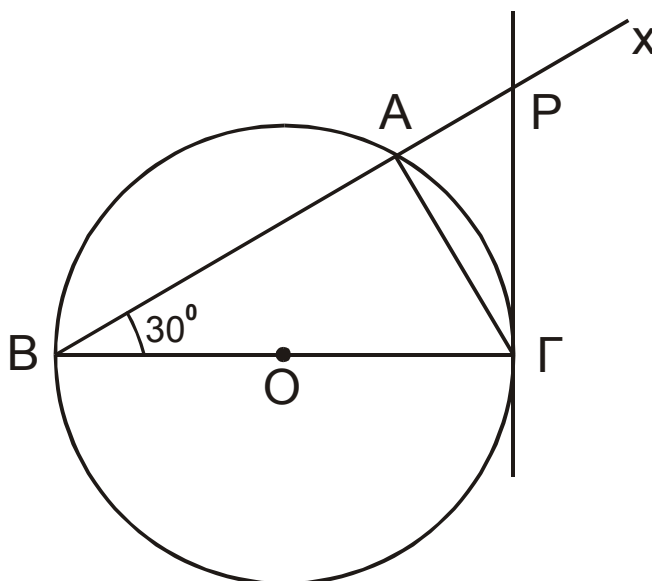
β. να υπολογιστεί η γωνία \hat{A} .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου $B\Gamma$ και ημιευθεία Bx τέτοια, ώστε η γωνία ΓBx να είναι 30° . Έστω ότι η Bx τέμνει τον κύκλο στο σημείο A . Φέρουμε την

εφαπτομένη του κύκλου στο Γ , η οποία τέμνει τη $B\chi$ στο σημείο P .



Να αποδείξετε ότι:

α. $A\Gamma = R$.

Μονάδες 5

β. $\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 4$.

Μονάδες 10

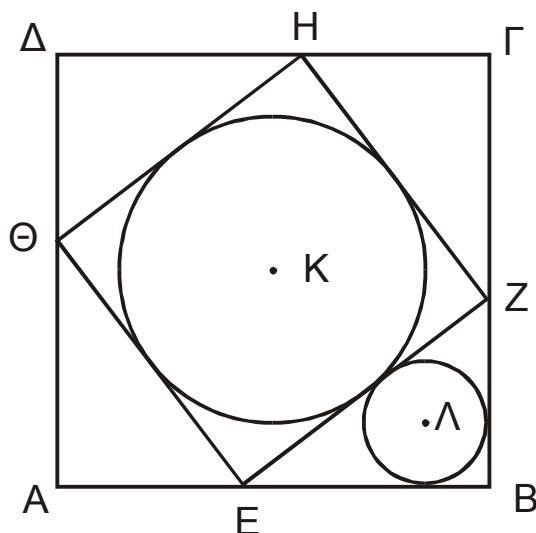
γ. $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο $EZH\Theta$ έτσι, ώστε:

$AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = 3$ cm.



α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου EBZ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο EBZ είναι $\rho = 1\text{cm}$.

Μονάδες 12

γ. Εάν (K, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο $EZH\Theta$, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (K, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ) .

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω ένας κύκλος (O, R) .

α. Στον κύκλο (O, R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος**" αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

- β.** Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

- γ.** Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) ορίζεται με τον τύπο:

$$\Delta_{(O,R)}^P = R^2 + OP^2.$$

Μονάδες 2

- δ.** Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

- Γ.** Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=1$ και $B\Gamma=\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

- α.** τη γωνία \hat{A}

Μονάδες 9

- β.** το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 9

- γ.** τη διάμεσο $BM = \mu_\beta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $α, β, γ$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $β^2+γ^2=3α^2$. Αν η διάμεσος $ΑΜ$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$ στο $Ε$,

α. να εκφράσετε τη διάμεσο $ΑΜ$ ως συνάρτηση της πλευράς $α$

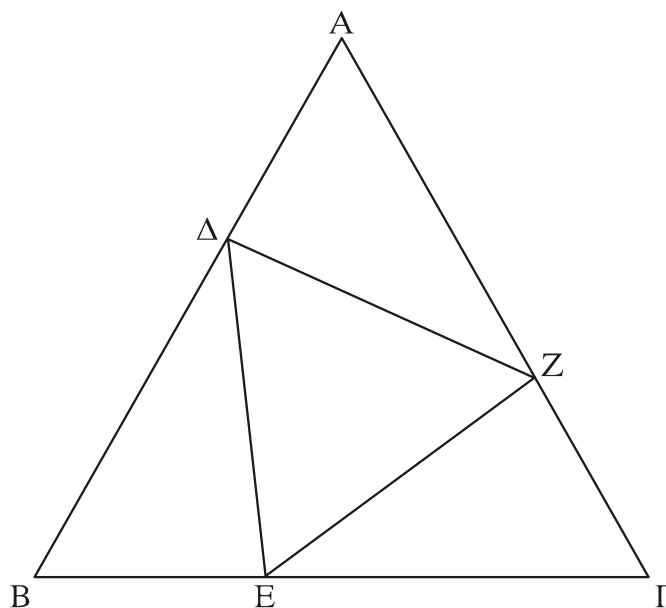
Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι $ΑΜ \cdot ΑΕ = \frac{3α^2}{2}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$, πλευράς $α$. Στις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία $Δ, Ε, Ζ$ τέτοια, ώστε να είναι $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = \frac{1}{3}α$, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του $α$:

α. του τριγώνου $\Lambda\Delta\text{Z}$

Μονάδες 9

β. του τριγώνου $\Delta\text{E}\text{Z}$

Μονάδες 7

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά την 10.30 πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 11

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.

Στήλη I	Στήλη II
α. Εμβαδόν τραπεζίου	1. $E = \tau\rho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	2. $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	3. $E = \frac{(B + \beta) \nu}{2}$
	4. $E = \frac{1}{2} P_{\nu} \alpha_{\nu}$
	5. $E = \alpha \nu_{\alpha}$

Στη **Στήλη II** περισσεύουν δύο τύποι.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**", αν η πρόταση είναι σωστή, και "**Λάθος**", αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$$

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν ισχύει η σχέση:

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{2} = R^2.$$

γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1 A_2 \dots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi_\nu = 150^\circ$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν .

Μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma=2$, $\beta=1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $(ΑΒΓ) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $a = \sqrt{3}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

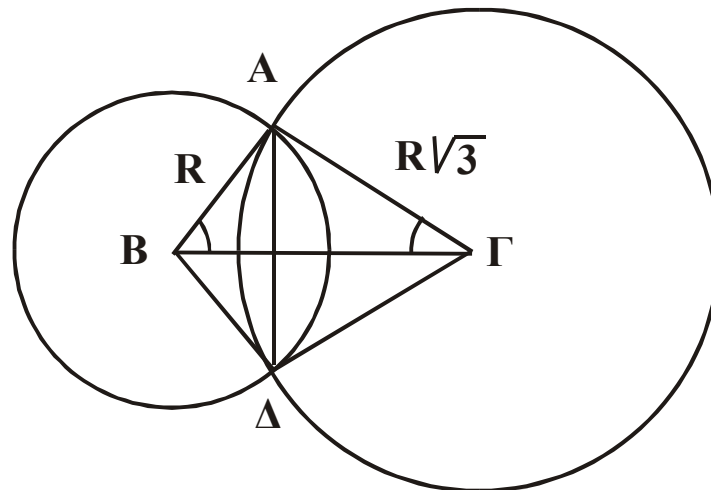
Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς AB πάνω στη πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με μήκη πλευρών $AB=R$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (B, R) και $(\Gamma, R\sqrt{3})$.



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.

Μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 8

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 5, 5

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{συν}\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 4

B.

α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$ και $\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$, με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις

παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

- A. $\lambda=1,$ B. $\lambda=3,$ Γ. $\lambda=2,$
Δ. $\lambda=-2,$ E. $\lambda=-3.$

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, -\sqrt{3}),$
 $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$ και $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1).$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'.

ΣΤΗΛΗ Α'

ΣΤΗΛΗ Β'

1. γωνία των \vec{u} και \vec{v}
2. γωνία των \vec{u} και \vec{w}
3. γωνία των \vec{v} και \vec{w}

- A. $\pi/2$
- B. $\pi/6$
- Γ. $\pi/4$
- Δ. $2\pi/3$
- E. $3\pi/4$
- Z. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2k + 2$ και $\beta = 6k + 7,$ όπου k ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Μονάδες 9

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - \alpha)$ με το 10 είναι 2.

Μονάδες 8

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός $(\alpha + \beta - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OD .

Μονάδες 9

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε) . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n=1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1).$$

Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

Μονάδες 9

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμηγκία διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

Μονάδες 8

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x+y-1=0$ στο σημείο Α.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δε θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Αν κατά την ανάπτυξη των θεμάτων χρησιμοποιήσετε σχήματα, αυτά μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
6. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια ώρα και μισή (1 1/2) μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΤΕΛΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
 ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

Μονάδες 2

A.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

A.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 6

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:

A. $x+3y=10$, B. $5x-y=8$, Γ. $x-3y=10$,

Δ. $3x+2y=3$, E. $\frac{1}{2}x+y=5$

Μονάδες 4

B.2. Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες

τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2+y^2-6x+4y-3=0$	1. $K(0,-1), \rho=2$
β. $x^2+(y+1)^2=4$	2. $K(3,-2), \rho=1$
	3. $K(3,-2), \rho=4$

Μονάδες 4

Β.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο $(1,-1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=2$.

β. Ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η ευθεία $y=2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda^2=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακέραιους της μορφής $\alpha=6k+\nu$ με $0 \leq \nu < 6$ και k ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha=6k+1$ ή τη μορφή $\alpha=6k+5$, όπου k ακέραιος

Μονάδες 10

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2=3\mu+1$, όπου μ ακέραιος

Μονάδες 10

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2)$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-2)$.

Μονάδες 7

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k , ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

Μονάδες 8

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2, 2)$, $\Lambda(-1, 5)$ και $M(1, 3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K , Λ και M .

Μονάδες 4,5

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M .

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M .

Μονάδες 6,5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $\alpha | \beta$, τότε $\alpha | \lambda \beta$ για κάθε ακέραιο λ .

Μονάδες 4

β. Αν $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, τότε $\alpha | (\beta + \gamma)$.

Μονάδες 4

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και ν το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha, \beta) < (\beta, \nu)$

β. $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu)$

γ. $(\alpha, \beta) > (\beta, \nu)$

δ. $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu) + 1$

όπου (α, β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β .

Μονάδες 4,5

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $7 | (\alpha + 5)$ και $7 | (40 - \beta)$ τότε:

α. $7 | (\alpha + \beta)$,

β. $7 | (\alpha + \beta + 1)$,

γ. $7 | (\alpha + \beta + 2)$,

δ. $7 | (\alpha + \beta - 3)$.

Μονάδες 4

Β.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

Β.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}. \text{ Έστω τα διανύσματα } \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}.$$

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο $M(k, \lambda)$ με $k > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο,

ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, k)$ να είναι παράλληλο προς τη

μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

- δ.** Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O , άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο M .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

- A.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 7

- B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

- α.** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- β.** Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$.

Μονάδες 6

- γ.** Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

B. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

γ. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει: $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$ όπου $[\alpha, \beta]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και (α, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β .

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1) .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	1. $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	2. $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	4. $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

Β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ B' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{\nu}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}.$$

Μονάδες 7

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

- γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Μονάδες 2

- δ. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{AB} έχουμε

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}.$$

Μονάδες 2

- Γ. α. Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α ;

Μονάδες 5

- β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ;

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω $\alpha \in \mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

- A. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή $\alpha^3 = 8k$ όπου $k \in \mathbf{Z}$ ή $\alpha^3 = 2k+1$ όπου $k \in \mathbf{Z}$.

Μονάδες 12

- B. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές
 $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ όπου
 $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} .

Μονάδες 8

B. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1, 5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και

$E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία

$$K \left(\frac{p}{2}, p \right) \text{ και } \Lambda \left(\frac{p}{2}, -p \right).$$

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K \left(\frac{p}{2}, p \right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, να γίνουν με στυλό διαρκείας (μπλε ή μαύρο).
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά την 10.30' πρωινό.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ