

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, δείξτε ότι ισχύει:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

(7 μονάδες)

Β. Έστω ότι έχουμε την κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος μεγέθους  $n$ . Αν  $X_1, \dots, X_k$  οι τιμές της (ποσοτικής) μεταβλητής, με συχνότητες  $n_1, n_2, \dots, n_k$  και σχετικές συχνότητες  $f_1, f_2, \dots, f_k$  αντίστοιχα και  $\bar{X}$  ο αριθμητικός μέσος των τιμών του δείγματος, δείξτε ότι  $\bar{X} = \sum_{i=1}^k X_i f_i$

(4 μονάδες)

Γ. Απαντήστε (χωρίς απόδειξη - αιτιολόγηση) στις επόμενες ερωτήσεις.

1. Σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$ , παρατηρήθηκε ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x_i$ , η απόλυτη συχνότητα  $n_i$  ισούται με την (αντίστοιχη) εκατοστιαία σχετική συχνότητα  $f_i\%$ , δηλαδή ισχύει  $n_i = f_i\%$  για κάθε  $i=1,2,3,\dots$ . Ποιο είναι το μέγεθος  $n$  του δείγματος;

(2 μονάδες)

2. Τις τελευταίες 7 ημέρες, οι θερμοκρασίες σε ένα χωριό της Νορβηγίας ήταν  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  βαθμούς αντίστοιχα. Τι έχετε να παρατηρήσετε για το συντελεστή μεταβλητότητας της θερμοκρασίας αυτού του επταημέρου;

(2 μονάδες)

3. Έστω  $x_1, \dots, x_n$  οι τιμές ενός δείγματος,  $\bar{x}$  η μέση τιμή τους και  $s$  η τυπική τους απόκλιση. Αν κάθε μία από τις πιο πάνω τιμές πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό  $a$  και σε κάθε γινόμενο προστεθεί ο αριθμός  $b$ , γράψτε τη μέση τιμή  $\bar{x}'$  και την τυπική απόκλιση  $s'$  των νέων τιμών  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

(2 μονάδες)

4. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και συμβολίζουμε με  $n_i$  τις συχνότητες και  $f_i$  τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών  $x_i$  της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με  $a_i$  το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του δείγματος, γράψτε με τι ισούται το  $a_i$ .

(2 μονάδες)

Δ. Ένας μαθητής της Γ' Λυκείου, διεκδικεί την εισαγωγή του στην

τριτοβάθμια εκπαίδευση με τους εξής βαθμούς:

1. Γενικός βαθμός πρόσβασης: 16
2. 1<sup>ο</sup> μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 15
3. 2<sup>ο</sup> μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 17

Υπολογίστε τη μέση επίδοση του συγκεκριμένου μαθητή.

(Υπενθυμίζεται ότι ο γενικός βαθμός πρόσβασης έχει συντελεστή βαρύτητας 8, το 1<sup>ο</sup> μάθημα αυξημένης βαρύτητας έχει συντελεστή βαρύτητας 1,3 και το 2<sup>ο</sup> 0,7).

(2 μονάδες)

Ε. Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα πάνω στην Εθνική οδό, μεταφέροντας εμπορεύματα από τη Θεσσαλονίκη προς την Αθήνα. Καθώς πλησιάζει προς τη Λάρισα, η θέση του πάνω στην Εθνική οδό συναρτήση του χρόνου  $t$ , δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t.$$

Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του φορτηγού. Η ταχύτητά του αυξάνεται ή ελαττώνεται;

(4 μονάδες)

## ΖΗΤΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των βαθμών πρόσβασης του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου, που εξετάστηκαν σε εθνικό επίπεδο το έτος 2002, σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία που έδωσε στη δημοσιότητα το Υπουργείο Παιδείας.

| Κλάσεις<br>[ - ) | Σχετική Συχνότητα<br>$f_i \%$ |
|------------------|-------------------------------|
| 0 – 2            | 1                             |
| 2 – 4            | 2                             |
| 4 – 6            |                               |
| 6 - 8            | 16                            |
| 8 – 10           | 18                            |
| 10 – 12          | 16                            |
| 12 – 14          | 14                            |
| 14 - 16          | 13                            |
| 16 – 18          |                               |
| 18 - 20          | 5                             |

1. Αν είναι γνωστό ότι το πλήθος των μαθητών που πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και μικρότερο του 18, ήταν τετραπλάσιο αυτών που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4 και μικρότερο του 6, να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις δύο σχετικές συχνότητες που λείπουν. **(5 μονάδες)**
2. Είναι γνωστό, ότι 55872 μαθητές, πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 10. Να βρείτε το συνολικό πλήθος των υποψηφίων. **(4 μονάδες)**
3. Να υπολογίσετε πόσοι υποψήφιοι είχαν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13. **(4 μονάδες)**
4. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα αυτός να είναι υποψήφιος της θεωρητικής κατεύθυνσης είναι 0,34 ενώ η πιθανότητα να είναι υποψήφιος της θετικής, είναι μισή από την πιθανότητα να είναι υποψήφιος της τεχνολογικής. Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», καθώς και το πλήθος των μαθητών της θετικής κατεύθυνσης (στρογγυλοποιείστε την απάντησή σας στον πλησιέστερο ακέραιο). **(12 μονάδες)**

## ΖΗΤΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές και θεωρούμε το ενδεχόμενο A: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι».

1. Βρείτε την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A. **(8 μονάδες)**
2. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας συχνοτήτων:

| Τιμές μεταβλητής<br>$y_i$ | Απόλυτες συχνότητες<br>$n_i$ |
|---------------------------|------------------------------|
| $2x^2 P(A)$               | 3                            |
| $3x^2 P(A')$              | 2                            |
| $xP(\Omega)$              | 3                            |

Όπου  $\Omega$  και  $P(A)$  ο δειγματικός χώρος και η πιθανότητα

αντίστοιχα του 1<sup>ου</sup> ερωτήματος και  $x \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ .

α. Υπολογίστε (ως συνάρτηση του  $x$ ) τη μέση τιμή  $\bar{y}$  της μεταβλητής  $y$

**(4 μονάδες)**

β. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{y}$

**(13 μονάδες)**

**ΖΗΤΗΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (P(A))^2 x^3 - [7P(A) - 3]x - x \ln x + P(B)$ , με  $x > 0$  και  $P(A), P(B)$ , οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

1. Βρείτε την  $f'(x)$  **(4 μονάδες)**

2. Βρείτε την  $P(A)$ , αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει, για  $x=1$ , εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα  $x'x$ . **(6 μονάδες)**

3. Αν  $P(A) = \frac{1}{3}$  και  $f(1) = \frac{55}{36}$ , δείξτε ότι  $P(B) = \frac{3}{4}$  και ότι τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα. **(7 μονάδες)**

4. Δείξτε ότι  $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$  **(8 μονάδες)**

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151

Β. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 85

Γ. 1.  $n_i = f_i \% \Rightarrow n_i = \frac{n_i}{n} 100 \Rightarrow 1 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = 100$

2. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδα 96) ότι  $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ . Όμως

$$\bar{x} = \frac{(-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3}{7} = \frac{0}{7} = 0.$$

Επομένως ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ορίζεται.

3. Από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελίδα 99,

προκύπτει:  $\bar{x}' = a \cdot \bar{x} + b$ ,  $s' = |a| \cdot s$ .

4. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 70:  $a_i = n_i \frac{360^\circ}{n} = 360 f_i$

Δ. Η ζητούμενη μέση επίδοση είναι ο ακόλουθος σταθμικός μέσος:

$$\frac{16 \cdot 8 + 15 \cdot 1,3 + 17 \cdot 0,7}{8 + 1,3 + 0,7} = \frac{128 + 19,5 + 11,9}{10} = \frac{159,4}{10} = 15,94$$

Ε. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδες 27, 28) ότι, αν  $u$  η ταχύτητα και  $a$  η επιτάχυνση του κινητού, τότε  $u(t) = x'(t)$  και  $a(t) = u'(t) = x''(t)$ . Άρα,

στη συγκεκριμένη περίπτωση, θα είναι:  $u(t) = x'(t) = -t^2 - t - 1$  και  $a(t) = x''(t) = u'(t) = -2t - 1$  και επειδή  $t \geq 0$ , θα είναι  $a(t) < 0$ . Επομένως, η ταχύτητα του φορτηγού μειώνεται.

### ΖΗΤΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

1. Έστω  $x, y$  οι δύο ζητούμενες (εκατοστιαίες) σχετικές συχνότητες των κλάσεων  $[4,6)$  και  $[16,18)$  αντίστοιχα. Ξέρουμε ότι  $\sum f_i \% = 100$  και παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δοσμένων σχετικών συχνοτήτων είναι 85. Άρα θα ισχύει  $x + y = 100 - 85 = 15$ . Εξάλλου, από υπόθεση, έχουμε ότι  $y = 4x$ . Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε  $x = 3$ ,  $y = 12$ . Άρα οι ζητούμενες σχετικές συχνότητες είναι 3% και 12% αντίστοιχα.

2. Αθροίζοντας τις δοσμένες σχετικές συχνότητες του πίνακα, βλέπουμε ότι βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 10 έχει πάρει το  $(16+14+13+12+5)\% = 60\%$  των υποψηφίων. Από υπόθεση, αυτό το ποσοστό αντιστοιχεί σε πλήθος 55872 ατόμων. Άρα, το ζητούμενο συνολικό πλήθος των υποψηφίων θα είναι:  $55872 \frac{100}{60} = 93120$  υποψήφιοι.

3. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι, βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13, έχει πάρει το  $(\frac{16}{2} + \frac{14}{2})\% = 15\%$  των υποψηφίων. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι το 15% του συνόλου, δηλαδή  $\frac{15}{100} \cdot 93120 = 13968$  υποψήφιοι.
4. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: «ο υποψήφιος είναι της θεωρητικής κατεύθυνσης», B: «ο υποψήφιος είναι της θετικής κατεύθυνσης» και T: «ο υποψήφιος είναι της τεχνολογικής κατεύθυνσης». Αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», δηλαδή την  $P(A \cup T)$ . Από υπόθεση είναι  $P(A) = 0,34$  και  $P(T) = 2P(B)$ . Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι  $P(A) + P(B) + P(T) = 1$ . Άρα έχουμε:
- $$0,34 + P(B) + 2P(B) = 1 \Leftrightarrow 3P(B) = 0,66 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0,66}{3} \Leftrightarrow P(B) = 0,22$$
- Επομένως είναι  $P(T) = 2P(B) = 0,44$ . Τα ενδεχόμενα A και T είναι ασυμβίβαστα, αφού κάθε μαθητής μπορεί να έχει επιλέξει μόνο μία κατεύθυνση σπουδών. Με εφαρμογή του απλού προσθετικού νόμου, έχουμε:  $P(A \cup T) = P(A) + P(T) = 0,34 + 0,44 = 0,78$ . Το πλήθος των υποψηφίων της θετικής κατεύθυνσης είναι  $0,22 \cdot 93120 = 20486,4 \approx 20486$  υποψήφιοι.

### ΖΗΤΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα K: «το νόμισμα έφερε κεφάλι» και Γ: «το νόμισμα έφερε γράμματα». Με δέντροδιάγραμμα, βρίσκουμε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης:  $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$ . Το ενδεχόμενο A: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι» είναι το  $A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$ . Άρα, για την πιθανότητα να συμβεί το A, έχουμε:  $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{4}$
2. Κατ' αρχάς, αντικαθιστούμε στον πίνακα (στις τιμές της μεταβλητής  $y_i$ ) τις τιμές των  $P(A) = 3/4$ ,  $P(A') = 1 - 3/4 = 1/4$  και  $P(\Omega) = 1$  οπότε ο πίνακας συχνοτήτων γίνεται:

| Τιμές μεταβλητής<br>$y_i$ | Απόλυτες συχνότητες<br>$n_i$ |
|---------------------------|------------------------------|
| $\frac{3}{2}x^2$          | 3                            |
| $\frac{3}{4}x^2$          | 2                            |
| $x$                       | 3                            |

α. Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{y} = \frac{\frac{3}{2}x^2 \cdot 3 + \frac{3}{4}x^2 \cdot 2 + 3x}{8} = \frac{\frac{24}{4}x^2 + 3x}{8} = \frac{6x^2 + 3x}{8}$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{6x^2 + 3x}{8}} = \frac{8}{6x^2 + 3x}, x \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως ρητή συνάρτηση) και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = -8 \cdot \frac{12x+3}{(6x^2+3x)^2}$$

Τώρα έχουμε:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$  και

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -8 \cdot (12x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 12x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

| $x$     | -1/2 | -1/4 | 0 |
|---------|------|------|---|
| $f'(x)$ | +    | 0    | - |
| $f(x)$  | ↗    | T.M  | ↘ |

Επομένως, η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, για  $x = -\frac{1}{4}$ , το

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{8}{\frac{6}{16} - \frac{3}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{8} - \frac{3}{4}} = \frac{8}{-\frac{3}{8}} = -\frac{64}{3}$$

#### ΖΗΤΗΜΑ 4°

$$1. \quad f'(x) = [(P(A))^2 x^3 - (7P(A) - 3)x - x \ln x + P(B)]' =$$

$$= 3 \cdot [P(A)]^2 x^2 - 7P(A) + 3 - \ln x - 1$$

2. Από υπόθεση έχουμε  $f'(1) = 0$ , οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$3 \cdot [P(A)]^2 - 7 \cdot P(A) + 2 = 0. \text{ Έχουμε } \Delta = 25 \text{ και, τελικά,}$$

$$P(A) = \begin{cases} \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2, & \text{απορ. αφού } 0 \leq P(A) \leq 1 \\ \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, & \text{δεκτη τιμή} \end{cases} \quad \text{Άρα, τελικά, } P(A) = \frac{1}{3}.$$

3. Για  $P(A) = \frac{1}{3}$ , ο τύπος της συνάρτησης γίνεται

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \left(\frac{7}{3} - 3\right)x - x \ln x + P(B) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - x \ln x + P(B), \text{ οπότε}$$

$$f(1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B) \text{ (αφού } \ln 1 = 0). \text{ Όμως, από υπόθεση, } f(1) = \frac{55}{36}, \text{ άρα έχουμε:}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow \frac{4}{36} + \frac{24}{36} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}.$$

Έστω ότι τα A, B

είναι ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1$ , άτοπο,

αφού  $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$ . Άρα τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

$$4. \quad \frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A \cap B) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(A), \text{ ισχυει αφου } A \cap B \subseteq A \\ \text{ΚΑΙ} \\ P(A \cap B) \geq \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{13}{12} - P(A \cup B) \geq \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1, \text{ που ισχυει} \end{array} \right.$$

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Δίνεται η συνάρτηση  $F(x)=f(x)+g(x)$ . Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:  $F'(x)=f'(x)+g'(x)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

**B.** Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και η ένδειξή του είναι ο αριθμός 4. Έστω τα ενδεχόμενα  $A=\{1, 3, 5\}$  και  $B=\{2, 4, 6\}$

Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις 1 έως 4:

1. Πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο  $A \cap B$ .
2. Πραγματοποιήθηκε τουλάχιστον ένα από τα  $A$  και  $B$ .
3. Πραγματοποιήθηκε το αντίθετο ενδεχόμενο του  $B$ .
4. Πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο  $A \cap B'$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**Γ.** Οι παρατηρήσεις  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 4$ , εύρος  $R=10$  και τυπική απόκλιση  $s=2$ .

Να γράψετε τη μέση τιμή, το εύρος και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων  $-2t_1, -2t_2, -2t_3, \dots, -2t_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

**Δ.** Να γράψετε τους κανόνες, που δίνουν τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x)$  με  $c$  πραγματική σταθερά,  $f(x)g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  με  $g(x) \neq 0$ ,  $f(g(x))$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7



## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη σφαίρα  $K$  και τρεις μαύρες τις  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$ . Αφαιρούμε τυχαίως μια σφαίρα από το κουτί, την καταγράφουμε και στην συνέχεια αφαιρούμε τυχαίως μια δεύτερη σφαίρα και την καταγράφουμε επίσης.

**α.** Να βρείτε το δειγματικό χώρο  $\Omega$  του πειράματος. ΜΟΝΑΔΕΣ 9

**β.** Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα, που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A: “Και οι δύο σφαίρες είναι μαύρες”

B: “Μόνο μία σφαίρα είναι μαύρη”

Γ “Καμία σφαίρα δεν είναι μαύρη” ΜΟΝΑΔΕΣ 7

**γ.** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των A, B και Γ. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**δ.** Να σχεδιάσετε το σημειόγραμμα, που περιγράφει τον αριθμό των μαύρων σφαιρών, που περιέχουν τα απλά ενδεχόμενα του  $\Omega$ . ΜΟΝΑΔΕΣ 5

## ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  και ένα μη κενό ενδεχόμενό του A. ( $A \neq \emptyset$ )

**A.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

**B.** Θεωρούμε τις παρατηρήσεις:  $P(A)$ ,  $P(A')$ ,  $P(\emptyset)$ ,  $P(\Omega)$ .

**α.** Να υπολογίσετε την μέση τιμή τους και την διάμεσό τους. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

**β.** Να δείξετε, ότι η διακύμανσή τους είναι:  $s^2 = \frac{1}{4} [2P^2(A) - 2P(A) + 1]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

**γ.** Να δείξετε, ότι:  $CV \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  και η ισότητα ισχύει, όταν  $P(A) = P(A')$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**ΘΕΜΑ 4°**

Τα ψυγεία μιας εταιρείας συντήρησης τροφίμων είναι κατανεμημένα σε τέσσερις κλάσεις, σύμφωνα με την θερμοκρασία  $X$  (σε  $^{\circ}\text{C}$ ), που επικρατεί στο εσωτερικό τους, όπως φαίνεται στη πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα.

| Κλάσεις<br>[ $-$ , $-$ ) | Κεντρικές τιμές<br>$x_i$ | Συχνότητες<br>$v_i$ | Σχετικές συχνότητες<br>$f_i$ % |
|--------------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------------|
| [-4, -2)                 |                          |                     |                                |
| [-2, 0 )                 |                          |                     |                                |
| [0, 2 )                  |                          |                     |                                |
| [2, 4 )                  |                          |                     |                                |
| <b>ΣΥΝΟΛΟ:</b>           |                          |                     |                                |

Σε σχέση με τον αριθμό των ψυγείων της πρώτης κλάσης, η δεύτερη κλάση έχει τριπλάσιο αριθμό και η τέταρτη πενταπλάσιο αριθμό ψυγείων.

**A.** Να αποδείξετε, ότι η μέση θερμοκρασία των ψυγείων είναι  $\overline{x} = 1^{\circ}\text{C}$   
MONAΔΕΣ 6

**B.** Έστω, ότι η τρίτη κλάση έχει ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη κλάση.

**α.** Να συμπληρώσετε την στήλη με τις σχετικές συχνότητες  $f_i\%$  του παραπάνω πίνακα και να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.  
MONAΔΕΣ 9

**β.** Να υπολογίσετε την διάμεσο θερμοκρασία  $\delta$ .  
MONAΔΕΣ 5

**γ** Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, να εκτιμήσετε το ποσοστό των ψυγείων με θερμοκρασία μεγαλύτερη από  $0,5^{\circ}\text{C}$ .  
MONAΔΕΣ 5

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

**ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘEMA 10

**α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31. Η παράγωγος αθροίσματος.**

 $\beta. \quad 1\Lambda$  $2\Sigma$  $3\Delta$ 

4A

$$\gamma. \quad \overline{x'} = -2 \overline{x} = -8$$

$$R' = \max' - \min' = -2\min + 2\max = 2(\max - \min) = 2R = 20$$

$$s' = |c|s = 2s = 4$$

**δ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33. (ο σχετικός πίνακας).**

## OEMA 20

**α.** Με το πίνακα διπλής εισόδου ή το δέντροδιάγραμμα του πειράματος βρίσκουμε

$$\Omega = \{KM_1, KM_2, KM_3, M_1K, M_1M_2, M_1M_3, M_2K, M_2M_1, M_2M_3, M_3K, M_3M_1, M_3M_2\}$$

**β.**  $A = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_1, M_2M_3, M_3M_1, M_3M_2\}$

$$B = \{KM_1, KM_2, KM_3, M_1K, M_2K, M_3K\}$$

$$\Gamma = \{ \}$$

γ. Επειδή η αφαίρεση των σφαιρών γίνεται τυχαία ( δεξ σελίδα 150 Σχόλιο), τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα, οπότε από τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{12} = 0,5$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{12} = 0,5 \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = P(\emptyset) = 0$$

**δ.**

|          |         |
|----------|---------|
| •        | •       |
| •        | •       |
| •        | •       |
| •        | •       |
| •        | •       |
| •        | •       |
| 2 ΜΑΥΡΕΣ | 1 ΜΑΥΡΗ |
| ΣΦΑΙΡΕΣ  | ΣΦΑΙΡΑ  |

**CEMA 30**

**A.** Έχουμε:  $f'(x) = (2x^2 - 2x + 1)' = 4x - 2$  και

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \Leftrightarrow x=1/2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1/2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1/2$$

Επομένως, (κριτήριο  $1^{ης}$  παραγώγου) η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $\mathbb{R}$  για  $x_0=1/2$  το

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$

**B. α)** Έχουμε  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 t_i}{4} = \frac{P(A) + P(A') + P(\emptyset) + P(\Omega)}{4} = \frac{1+0+1}{4} = \frac{1}{2}$ .

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Είναι

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(A), \quad P(A'), \quad P(\Omega) = 1 \quad \text{ή} \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A'), \quad P(A), \quad P(\Omega) = 1$$

Σε κάθε περίπτωση η διάμεσος, ως το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, ισούται με

$$\delta = \frac{P(A) + P(A')}{2} = \frac{1}{2}$$

**β)** Είναι  $s^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (t_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{4} \left[ (P(A) - \frac{1}{2})^2 + (P(A') - \frac{1}{2})^2 + (P(\emptyset) - \frac{1}{2})^2 + (P(\Omega) - \frac{1}{2})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ (P(A) - \frac{1}{2})^2 + (1 - P(A') - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2})^2 \right]$$

$$= \dots \frac{1}{4} [2P^2(A) - 2P(A) + 1]$$

**γ.** Είναι  $s^2 = \frac{1}{4} f(P(A))$

Από το α ερώτημα έχουμε:  $s^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow s \geq \frac{1}{\sqrt{8}}$  και η ισότητα ισχύει όταν  $P(A) = 1/2$ . Έτσι,

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{s}{\frac{1}{2}} \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ωστε, είναι  $CV \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  και η ισότητα ισχύει, όταν  $P(A) = 1/2$ , που δίνει  $P(A') = 1 - P(A) = 1/2$ , δηλαδή, ισοδύναμα, όταν  $P(A) = P(A')$

#### ΘΕΜΑ 4ο

**A.** Έστω,  $x$  η συχνότητα της πρώτης κλάσης και  $y$  της τρίτης κλάσης. Για τα κέντρα και τις συχνότητες των κλάσεων έχουμε:

| $x_i$  | $v_i$  |
|--------|--------|
| -3     | $x$    |
| -1     | $3x$   |
| 1      | $y$    |
| 3      | $5x$   |
| ΣΥΝΟΛΟ | $9x+y$ |

Είναι:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{-3x - 3x + y + 15x}{9x+y} = \frac{9x+y}{9x+y} = 1$

**B. α)** Με  $y = x$ , από τον τύπο  $f_i \% = \frac{V_i}{V} 100\%$  βρίσκουμε

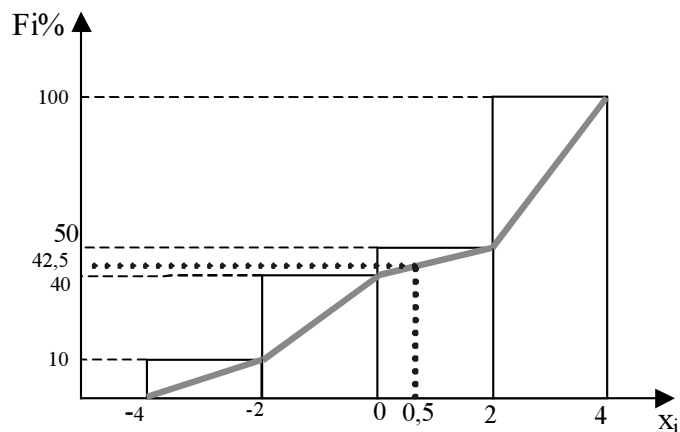
$$f_1 \% = \frac{x}{10x} 100\% = 10\%$$

$$f_2 \% = \frac{3x}{10x} 100\% = 30\%$$

$$f_3 \% = \frac{x}{10x} 100\% = 10\%$$

$$f_4 \% = \frac{5x}{10x} 100\% = 50\%$$

Έτσι, συμπληρώνουμε την τέταρτη στήλη του δοσμένου πίνακα. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το ζητούμενο πολύγωνο φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



β) Η διάμεσος αντιστοιχεί στην παρατήρηση, που έχει αθροιστική συχνότητα 50%. Έτσι, είναι η τετμημένη του σημείου του πολυγώνου των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που έχει τεταγμένη 50. Βρίσκουμε  $\delta = 2^\circ\text{C}$ .

γ) Το ποσοστό των ψυγείων με θερμοκρασία μικρότερη ή ίση της τιμής  $0,5^\circ\text{C}$  είναι η αθροιστική συχνότητα της τιμής  $0,5^\circ\text{C}$ . Από το σχήμα του Βα ερωτήματος το εκτιμάμε σε 42,5%. Επομένως το  $(100 - 42,5)\% = 57,5\%$  των ψυγείων έχει θερμοκρασία μεγαλύτερη από  $0,5^\circ\text{C}$ .



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** i) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης  $f$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . *Μονάδες 2*  
ii) Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 3*
- B.** Να γράψετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες που ισχύουν για την σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$  του δείγματος μεγέθους  $n \geq k$ , των τιμών μιας μεταβλητής  $X$ . *Μονάδες 10*
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ( $\Sigma$ ) ή Λάθος ( $\Lambda$ ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις.
- Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. *Μονάδες 2*
  - Αν για τις αθροιστικές συχνότητες  $N_i$ ,  $i=1,2,3,4,5$  ενός δείγματος τιμών  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  της μεταβλητής  $X$ , ισχύει  $N_i = 4 \cdot i^2 + 2i$ , τότε το μέγεθος του δείγματος είναι  $n=110$ . *Μονάδες 2*
  - Σε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος ισούται με την διαφορά της κεντρικής τιμής της πρώτης κλάσης από την κεντρική τιμή της τελευταίας κλάσης. *Μονάδες 2*
  - Σε κανονική κατανομή ισχύει:  $\bar{x} = \delta$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή και  $\delta$  η διάμεσος της. *Μονάδες 2*
  - Αν για τις πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(B)$  δύο ενδεχομένων  $A$ ,  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι  $P(A) \leq P(B)$  τότε ισχύει πάντα  $A \subseteq B$ . *Μονάδες 2*

**ΘΕΜΑ 2°**

Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής  $T$  με μέση τιμή  $\bar{t}$ , τυπική απόκλιση  $s \neq 0$  και η συνάρτηση  $F$  με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2}, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } x \neq 4 \\ -24 \cdot s, & \text{αν } x = 4 \end{cases},$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $A = [0, +\infty)$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι για  $x \neq 4$  ο τύπος της συνάρτησης  $F$  είναι

$$F(x) = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2). \quad \text{Μονάδες 7}$$

**β)** Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  της μεταβλητής  $T$ . Μονάδες 10

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s}$  στο σημείο της  $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ .

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3°**

Ο κυβισμός των κινητήρων  $X$ , σε κυβικά εκατοστά (κ.εκ.), ενός δείγματος 4.000 αυτοκινήτων, ακολουθεί κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 100 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. και 3.360 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ.

**α)** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ , την τυπική απόκλιση  $s$  και να εκτιμήσετε το εύρος  $R$  του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Μονάδες 12

**β)** Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ. ή μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Μονάδες 7

**γ)** Αν, μετά από επισκευή, ο κυβισμός κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 6%, να βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά των νέων τιμών του, και να εκτιμήσετε το εύρος τους.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα ενδεχόμενα  $K, \Lambda$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με πιθανότητες  $P(K), P(\Lambda)$  αντίστοιχα, όπου  $P(K) \neq 0$ .

**α)** Η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot [x - P(\Lambda)]^2 + x \cdot P(K), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει στο σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}$  μέγιστο το  $-\frac{5}{2} \cdot [P(K)]^2$ .

Να αποδείξετε ότι:

i)  $x_0 = P(K) + P(\Lambda)$

Μονάδες 6

ii)  $P(\Lambda) = 2 \cdot P(K)$

Μονάδες 4

**β)** Έστω, επιπλέον, ότι οι παρατηρήσεις:

$$P(\emptyset), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega), P(K), P(\emptyset), P(K), P(K \cup \Lambda), P(K \cap \Lambda)$$

έχουν διάμεσο  $\delta = \frac{1}{4}$  και  $P[(K - \Lambda) \cup (\Lambda - K)] = \frac{2}{3}$ .

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  $K, \Lambda, K \cap \Lambda, K \cup \Lambda$ .

Μονάδες 12

ii) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των παραπάνω παρατηρήσεων. Μονάδες 3





Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1<sup>ο</sup> Θέμα

- A. i) Σχολ. βιβλίο σελ. 16  
ii) Σχολ. βιβλίο σελ. 13  
B. Σχολικό βιβλίο σελ. 65  
Γ. 1 (Λ), 2 (Σ), αφού για  $i=5$ , είναι  $N_5 = v \Leftrightarrow v = 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 110$   
3 (Λ), 4 (Σ), 5 (Λ)

2<sup>ο</sup> Θέμα

- α) Για  $x \neq 4$  είναι:

$$F(x) = \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2)$$

β) Η F είναι συνεχής,

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 4} F(x) = F(4) \stackrel{\substack{\alpha. \text{ ερωτ.} \\ \kappa' \text{ υποθ. } x \rightarrow 4}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 4} (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2) = -24 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t} - 2s)(\sqrt{4} + 2) = -24 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} - 2s = -6 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} = -4 \cdot s \quad (\text{είναι } s > 0, \text{ άρα } \bar{t} < 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{-\bar{t}} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{t}|} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow CV = 0,25 = 25\%.$$

Επομένως, το δείγμα των τιμών  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  της μεταβλητής T δεν είναι ομοιογενές.

- γ) Η  $g$  ορίζεται στο  $[0, +\infty)$  αφού  $\bar{t} - 2s \stackrel{\beta. \epsilon \rho \omega \tau.}{=} -4 \cdot s - 2 \cdot s = -6 \cdot s \neq 0$  (από υπόθεση)  
Για  $x \neq 4$  είναι

$$g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s} \stackrel{\alpha. \epsilon \rho \omega \tau.}{=} \frac{(\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2)}{\bar{t} - 2s} = \sqrt{x} + 2$$

και

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

οπότε έχουμε

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \quad \text{και} \quad g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1 \quad (1).$$

Η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ):  $y = \lambda x + \beta$  στο  $A$  έχει  $\lambda = g'\left(\frac{1}{4}\right)$ , έτσι γίνεται:

$$y = g'\left(\frac{1}{4}\right) x + \beta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y = x + \beta.$$

Επειδή το  $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$  ανήκει στην ( $\epsilon$ ):  $y = x + \beta$ , είναι  $\frac{5}{2} = \frac{1}{4} + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{9}{4}$ ,

επομένως

$$(\epsilon): y = x + \frac{9}{4}$$

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

- α) Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. είναι

$$\frac{100}{4.000} \cdot 100\% = 2,5\%.$$

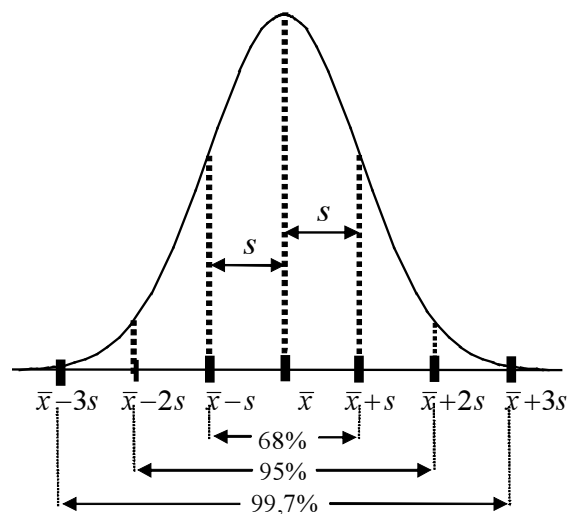
Όμως  $2,5\% = \frac{100\% - 95\%}{2}$  είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από  $\bar{x} - 2s$ .

Άρα

$$\bar{x} - 2s = 1.400 \quad (1)$$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ. είναι

$$\frac{3.360}{4.000} \cdot 100\% = 84\%.$$



Όμως  $84\% = 100\% - \frac{100\% - 68\%}{2}$  είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από  $\bar{x} + s$ .

Άρα

$$\bar{x} + s = 2000 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) δίνουν το σύστημα

$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 1400 \\ \bar{x} + s = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 200 \\ \bar{x} = 1800 \end{cases}.$$

Όστε:  $\bar{x} = 1.800\text{κ.εκ.}$ ,  $s = 200\text{κ.εκ.}$  και, τέλος,  $R \cong 6 \cdot s = 1.200\text{κ.εκ.}$ .

β) Έστω τα ενδεχόμενα:

A: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ.

B: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Ζητάμε την πιθανότητα  $P(A \cup B)$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από  $1200\text{κ.εκ.} = \bar{x} - 3s$

είναι  $\frac{100\% - 99,7\%}{2} = 0,15\%$  ενώ αυτό των αυτοκινήτων με κυβισμό

μεγαλύτερο από  $2000\text{κ.εκ.} = \bar{x} + s$  είναι  $\frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%$ . Επομένως

$$P(A) = 0,15\% \quad \text{και} \quad P(B) = 16\%$$

Επειδή, προφανώς, τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,15\% + 16\% = 16,15\%$$

γ) Έστω  $y_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,4000$ , ο κυβισμός των κινητήρων μετά την επισκευή.

Είναι  $y_i = x_i + 0,06x_i = 1,06 x_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,4000$ , οπότε ( βλέπε εφαρμογή 3 σελίδα 99 σχολικού βιβλίου)

$$\bar{y} = 1,06\bar{x} = 1,06 \cdot 1800 = 1908\text{κ.εκ}$$

και

$$s_y = 1,06s_x = 1,06 \cdot 200 = 212\text{κ.εκ.}$$

άρα

$$s_y^2 = 212^2 = 44944 \text{ (κ.εκ.)}^2.$$

Το εύρος των νέων τιμών βρίσκεται ως εξής: Αν  $\mu_x$ ,  $M_x$  είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα από τις τιμές  $x_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,4000$ , τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\mu_x \leq x_i \leq M_x$$

$$1,06 \mu_x \leq 1,06 x_i \leq 1,06 M_x$$

$$1,06 \mu_x \leq y_i \leq 1,06 M_x \quad \text{για κάθε } i=1,2,3,\dots,4000$$

Έτσι, η μικρότερη  $\mu_y$  και η μεγαλύτερη  $M_y$  από τις τιμές  $y_i, i=1,2,3,\dots,4000$ , είναι

$$\mu_y = 1,06 \mu_x$$

$$M_y = 1,06 M_x$$

και το εύρος  $R_y$  είναι:

$$R_y = M_y - \mu_y = 1,06 M_x - 1,06 \mu_x = 1,06 (M_x - \mu_x) = 1,06 R \cong 1,06 \cdot 1200 = 1272 \text{ κ.εκ.}$$

#### 4° Θέμα

α) i) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  (ως πολυωνυμική) με

$$f'(x) = -[x - P(\Lambda)] + P(K) = P(\Lambda) + P(K) - x.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x = 0 \Leftrightarrow x = P(\Lambda) + P(K).$$

Ακόμα:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x > 0 \Leftrightarrow x < P(\Lambda) + P(K) \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x < 0 \Leftrightarrow x > P(\Lambda) + P(K)$$

Άρα, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, P(\Lambda) + P(K)]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[P(\Lambda) + P(K), +\infty)$ , και παρουσιάζει μέγιστο στο  $x=x_0$  με  $x_0 = P(\Lambda) + P(K)$ .

ii) Για την μέγιστη τιμή έχουμε:

$$f(x_0) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow f(P(K) + P(\Lambda)) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} [P(K) + P(\Lambda) - P(\Lambda)]^2 + [P(K) + P(\Lambda)] P(K) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} [P(K)]^2 + [P(K)]^2 + P(K) P(\Lambda) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow$$

$$P(K) P(\Lambda) = 2 [P(K)]^2 \stackrel{P(K) \neq 0}{\Leftrightarrow} P(\Lambda) = 2P(K)$$

β) i) Ισχύουν:

$$\emptyset \subseteq K \cap \Lambda \subseteq K \text{ και } \Lambda \subseteq K \cup \Lambda \subseteq \Omega$$

επομένως

$$P(\emptyset) \leq P(K \cap \Lambda) \leq P(K) \text{ και } P(\Lambda) \leq P(K \cup \Lambda) \leq P(\Omega).$$

Ακόμα

$$P(K) < P(\Lambda) \quad (\text{από ερώτημα (α) (ii)})$$

Επομένως, αν διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις, έχουμε:

$$P(\emptyset), P(\emptyset), P(K \cap \Lambda), P(K), P(K), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega).$$

Η διάμεσος αυτών των 10 παρατηρήσεων είναι το ημίαθροισμα της 5<sup>ης</sup> και

$$6^{\text{ης}} \text{ παρατήρησης: } \delta = \frac{P(K) + P(K)}{2} = P(K)$$

Έτσι

$$P(K) = \delta = \frac{1}{4}$$

Ακόμα

$$P(\Lambda) = 2P(K) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Επειδή τα ενδεχόμενα  $K-\Lambda$  και  $\Lambda-K$  είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P[(K-\Lambda) \cup (\Lambda-K)] = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(K-\Lambda) + P(\Lambda-K) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K) - P(K \cap \Lambda) + P(\Lambda) - P(\Lambda \cap K) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K) + P(\Lambda) - 2P(K \cap \Lambda) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2P(K \cap \Lambda) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K \cap \Lambda) = \frac{1}{24}$$

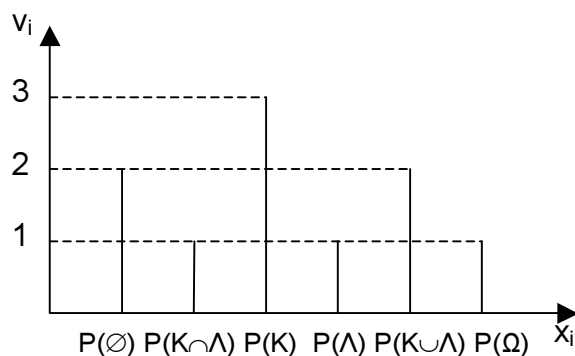
Τέλος:

$$P(K \cup \Lambda) = P(K) + P(\Lambda) - P(K \cap \Lambda) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}.$$

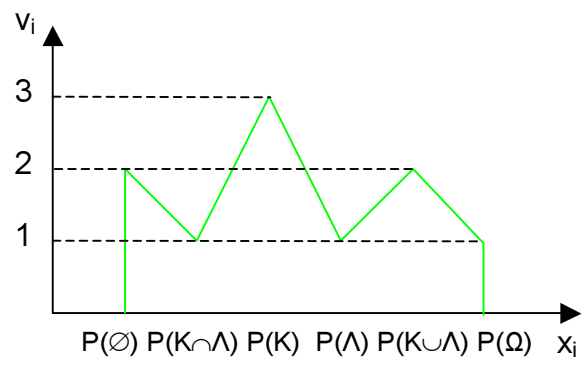
ii) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

| $x_i$ | $P(\emptyset)$ | $P(K \cap \Lambda)$ | $P(K)$ | $P(\Lambda)$ | $P(K \cup \Lambda)$ | $P(\Omega)$ |
|-------|----------------|---------------------|--------|--------------|---------------------|-------------|
| $v_i$ | 2              | 1                   | 3      | 1            | 2                   | 1           |

κατασκευάζουμε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων (διακριτή μεταβλητή).



Διάγραμμα  
συχνοτήτων



Πολύγωνο  
συχνοτήτων

**Σημείωση για τη βαθμολογία του 1ου Θέματος:**

**B.** Μονάδες 10. Επιμέρους 4 μονάδες για την 1<sup>η</sup> ιδιότητα και 6 μονάδες για την 2<sup>η</sup> ιδιότητα.



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  όπου  $k, n$  μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με  $k \leq n$

- Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$
- Δείξτε ότι  $0 \leq f_i \leq 1$  για  $i = 1, 2, \dots, k$
- Δείξτε ότι  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

(9 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**B.** Έστω  $A, B$  δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Να αποδείξετε ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**Γ.** Να γράψετε στην τελευταία στήλη το γράμμα της σωστής απάντησης

|   |                                                                                       | A                             | B   | Γ   | Δ   | ΑΠΑΝΤΗΣΗ |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----|-----|-----|----------|
| 1 | Αν $P(A)=0.3$ τότε το $P(A')$ ισούται με                                              | 0.3                           | 0.8 | 0.7 | 0.1 |          |
| 2 | Αν $P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(A \cap B)=0.1$ τότε το $P(A \cup B)$ ισούται με             | 0.6                           | 0.7 | 0.8 | 0.9 |          |
| 3 | Αν $P(A)=0.8, P(A \cap B)=0.2$ τότε                                                   | Το $P(A - B)$ ισούται με      | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9      |
|   |                                                                                       | Το $P(A' \cup B')$ ισούται με | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9      |
| 4 | Αν $P(A)=0.3$ και $P(B)=0.6$<br>Ποια από τις διπλανές σχέσεις<br>ΔΕΝ μπορεί να ισχύει | $P(A \cup B) =$               | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8      |
|   |                                                                                       | $P(A \cap B) =$               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4      |
|   |                                                                                       | $P(A - B) =$                  | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4      |

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x^3 - 6x + \mu$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2\lambda}$  και το μέγιστο της συνάρτησης  $f$  είναι 9 :

- Δείξτε ότι  $\lambda = 2$

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- Δείξτε ότι  $\mu = 5$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  όπου η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) είναι παράλληλη στον  $x'$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- Να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  γίνεται ελάχιστος.

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)



**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Μελετήσαμε ένα δείγμα Ι.Χ. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

| Αριθμός επιβατών<br>$x_i$ | Αριθμός αυτοκινήτων<br>$v_i$ | $f_i$ | $f_i \%$ | $N_i$ | $F_i$ | $F_i \%$ |
|---------------------------|------------------------------|-------|----------|-------|-------|----------|
| 1                         |                              |       |          |       |       |          |
| 2                         | 110                          |       |          | 160   |       |          |
| 3                         |                              |       |          |       |       | 70       |
| 4                         |                              | 0.075 |          |       |       |          |
| 5                         |                              |       |          | 400   |       |          |
| ΣΥΝΟΛΑ                    |                              |       |          |       |       |          |

**A.**

- Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.  
(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)
- Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος  
(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)
- Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές  
(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**B.** Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: “το αυτοκίνητο έχει το πολύ δύο επιβάτες”

(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)

B: “το αυτοκίνητο έχει τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες”

(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**Γ.** Επιλέγουμε στην τύχη έναν επιβάτη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: “ο επιβάτης έχει τρεις συνεπιβάτες”

(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Δ: “ο επιβάτης δεν έχει συνεπιβάτες”

(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Σ' ένα χωριό υπάρχουν  $n$  άνθρωποι που ο καθένας είναι  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ετών.

**A.** Αν το δείγμα  $x_1, x_2, \dots, x_n$  των ηλικιών τους έχει συντελεστή μεταβολής 20% και μετά από 25 χρόνια γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές,

- Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ηλικιών τους
- Βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$
- Αν ο μικρότερος σε ηλικία είναι 10 ετών, βρείτε προσεγγιστικά τη μεγαλύτερη ηλικία, αν υποθέσουμε ότι η κατανομή των ηλικιών είναι κανονική.

(9 ΜΟΝΑΔΕΣ)

**B.** Στο παραπάνω χωριό υπάρχουν μόνο 2 καφενεία, το A και το B. Αν το 30% των κατοίκων πηγαίνει στο A καφενείο και το 60% δεν πηγαίνει στο B ενώ το 50% πηγαίνει σε ένα τουλάχιστον από τα δύο καφενεία, να βρείτε:

- Τι ποσοστό των κατοίκων πηγαίνει και στα δύο καφενεία
- Απ' αυτούς που πηγαίνουν μόνο στο ένα καφενείο ποιοι είναι οι περισσότεροι, αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο A ή αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο B.

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ. Το κάθε ένα από τα  $n$  άτομα αγοράζει ένα λαχνό. Οι λαχνοί είναι αριθμημένοι από το 1 έως το  $n$  και έχουν ίδια πιθανότητα κλήρωσης. Αν η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από το να κληρωθεί άρτιος να βρείτε πόσα άτομα έχει το χωριό.

**(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)**



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1°**

**A.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 85

**B.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150

**Γ.** 1.Γ – 2.Α – 3.Α,Γ – 4.Α,Δ,Δ

**ΘΕΜΑ 2°**

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x - 1)(\sqrt{x^2+1} + x + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+1} + x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - (x+1)^2}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \frac{-2}{2(\sqrt{4} + 2)} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \lambda x^3 - 6x + \mu. \quad A_f = \mathbb{R}. \text{ Για } \lambda=2: f(x) = 2x^3 - 6x + \mu$$

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με :  $f'(x) = 6x^2 - 6$ .

$$\text{Είναι: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{Και: } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-1)(x+1) > 0$$

$$\begin{array}{c}
 -1 \qquad 1 \\
 + \quad | \quad - \quad | \quad +
 \end{array}$$

οπότε  $x < -1$  ή  $x > 1$

Ο πίνακας μεταβολών της  $f$  είναι:

| x    | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|------|-----------|----|---|-----------|
| $f'$ | +         | -  | + |           |
| $f$  |           |    |   |           |

Η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο για  $x = -1$ , το  $f(-1) = -2 + 6 + \mu = \mu + 4$

$$\text{Οπότε: } \mu + 4 = 9 \Leftrightarrow \mu = 5$$

iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι  $f'(x_0)$ . Οπότε, τα ζητούμενα σημεία έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης  $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$

Είναι :  $f(-1) = 9$  και  $f(1) = 1$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι : Β(-1,9) και Γ(1,1).

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  συναρτήσεως του  $x$  είναι:  $f'(x) = 6x^2 - 6$

Είναι:  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  και  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ο πίνακας μεταβολών της  $f'$  είναι:

|       |                                                                                   |     |                                                                                   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $x$   | $-\infty$                                                                         | $0$ | $+\infty$                                                                         |
| $f''$ |                                                                                   |     |                                                                                   |
| $f'$  | $-$                                                                               | $+$ |                                                                                   |
|       |  |     |  |

Η  $f'$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x = 0$   
 οπότε ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  γίνεται  
 ελάχιστος για  $x = 0$

### ΘΕΜΑ 3°

**A.**

i)

| Αριθμός<br>επιβατών<br>$x_i$ | Αριθμός<br>αυτοκινήτων<br>$v_i$ | $f_i$ | $f_i \%$ | $N_i$ | $F_i$ | $F_i \%$ | $x_i v_i$ | $(x_i - \bar{x})^2 v_i$ |
|------------------------------|---------------------------------|-------|----------|-------|-------|----------|-----------|-------------------------|
| 1                            | 50                              | 0,125 | 12,5     | 50    | 0,125 | 12,5     | 50        | 200                     |
| 2                            | 110                             | 0,275 | 27,5     | 160   | 0,4   | 40       | 220       | 110                     |
| 3                            | 120                             | 0,3   | 30       | 280   | 0,7   | 70       | 360       | 0                       |
| 4                            | 30                              | 0,075 | 7,5      | 310   | 0,775 | 77,5     | 120       | 30                      |
| 5                            | 90                              | 0,225 | 22,5     | 400   | 1     | 100      | 450       | 360                     |
| ΣΥΝΟΛΑ                       | $v = 400$                       | 1     | 100      |       |       |          | 1200      | 700                     |

ii) Η μέση τιμή είναι :  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{400} = \frac{1200}{400} = 3$

Αφού  $v = 400$  (άρτιος), η διάμεσος θα είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, αν αυτές έχουν διαταχθεί κατ' αύξουσα σειρά.

Δηλαδή:  $\delta = \frac{t_{200} + t_{201}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$

iii) Η διακύμανση είναι :  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{400} = \frac{700}{400} = \frac{7}{4}$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι:  $s = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Τέλος ο συντελεστής μεταβολής είναι:  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{6} > \frac{0,6}{6} = \frac{1}{10}$

αφού  $\sqrt{7} > 0,6$ .

Οπότε  $CV > \frac{1}{10}$  δηλ.  $CV > 10\%$ , άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**B.** Το πολύ δύο επιβάτες έχουν:  $v_1 + v_2 = 50 + 110 = 160$  αυτοκίνητα

Οπότε  $N(A) = 160$ , άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}.$$

Τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες έχουν :  $v_4 + v_5 = 30 + 90 = 120$  αυτοκίνητα.

Οπότε  $N(B) = 120$ , άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι :

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$$

Γ. Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από το σύνολο των

επιβαινόντων, δηλ.  $N(\Omega) = \sum_{i=1}^5 x_i v_i = 1200$

Τρεις συνεπιβάτες έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο με 4 επιβαίνοντες, δηλ.  $x_4 \cdot v_4 = 120$  άτομα. Οπότε  $N(\Gamma) = 120$ , άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{120}{1200} = \frac{1}{10}$$

Κανέναν συνεπιβάτη δεν έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο μόνος του,

δηλ.  $x_1 \cdot v_1 = 50$  άτομα. Οπότε  $N(\Delta) = 50$ , άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{50}{1200} = \frac{1}{24}$$

#### ΘΕΜΑ 4°

Α.

- i) Έστω  $\bar{x}$  η μέση ηλικία των κατοίκων και  $s$  η τυπική απόκλιση. Τότε, μετά από 25 χρόνια, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή, η μέση τιμή θα 'ναι  $\bar{x} + 25$  ενώ η τυπική απόκλιση δεν θα μεταβληθεί. Αφού το δείγμα γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές μετά από 25 χρόνια, τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι 10%.

$$\text{Οπότε : } \frac{s}{\bar{x} + 25} = \frac{1}{10} \quad (1)$$

$$\text{Επίσης, αφού CV είναι τώρα 20\%, είναι: } \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s}{\bar{x} + 25} = \frac{1}{10} \\ \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \end{array} \right| \begin{array}{l} 10s = \bar{x} + 25 \\ \bar{x} = 5s \end{array} \left| \begin{array}{l} 10s = 5s + 25 \\ \bar{x} = 5s \end{array} \right| \begin{array}{l} 5s = 25 \\ \bar{x} = 5s \end{array} \left| \begin{array}{l} s = 5 \\ \bar{x} = 25 \end{array} \right|$$

- ii) Η μέση τιμή των  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_v^2$  είναι:  $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2$

$$\text{Είναι : } s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right]$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \left( \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \bar{x}^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - 625$$

$$\frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} = 650$$

- iii) Στην κανονική κατανομή για το εύρος του δείγματος ισχύει  $R \approx 6s$ .  
Αφού λοιπόν η μικρότερη τιμή  $x_{\min}$  είναι 10, για τη μεγαλύτερη τιμή  $x_{\max}$  θα ισχύει η προσέγγιση:  $x_{\max} \approx 10 + 6s$  δηλ.  $x_{\max} \approx 40$

### B.

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους ανθρώπους που υπάρχουν στο χωριό.  
Έστω τα ενδεχόμενα:

A: "ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο A"

B: "ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο B"

Αφού το 30% των κατοίκων πηγαίνουν στο A, είναι:  $P(A) = 0,3$

Αφού το 60% των κατοίκων δεν πηγαίνουν στο B, είναι  
 $P(B') = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0,6 \Leftrightarrow P(B) = 0,4$

Αφού το 50% των κατοίκων πηγαίνει σ' ένα τουλάχιστον απ' τα δύο καφενεία,  
είναι  $P(A \cup B) = 0,5$

- i)  $A \cap B$  είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει και στα δύο καφενεία. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = 0,3 + 0,4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0,7 - 0,5 = 0,2$$

οπότε και στα δύο καφενεία πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

- ii)  $A - B$  είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο A και

$B - A$  είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο B.

Έχουμε:  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$  δηλαδή μόνο στο A πηγαίνει το 10% των κατοίκων

Ομοίως:  $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$  δηλαδή μόνο στο B πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

Οπότε περισσότεροι είναι οι κάτοικοι που πηγαίνουν μόνο στο B από εκείνους που πηγαίνουν μόνο στο A.

Γ. Αφού η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος, οι περιττοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους στο δείγμα  $1, \dots, n$  άρα  $n$  περιττός. Δηλαδή υπάρχει ένας

περιττός περισσότερο. Έτσι, το πλήθος των περιττών είναι  $\frac{v+1}{2}$  ενώ των άρτιων  $\frac{v-1}{2}$ .

Έστω τα ενδεχόμενα:

Π: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι περιττός”

Α: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι άρτιος”

$$\text{Τότε: } P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{v+1}{2}}{v} = \frac{v+1}{2v}$$

$$\text{Και: } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{v-1}{2}}{v} = \frac{v-1}{2v}$$

Αφού η  $P(\Pi)$  είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από την  $P(A)$ , έχουμε:

$$P(\Pi) = P(A) + \frac{0,8}{100}$$

$$\frac{v+1}{2v} = \frac{v-1}{2v} + 0,008$$

$$v+1 = v-1 + 0,016v$$

$$2 = 0,016v$$

$$v = \frac{2}{0,016} = \frac{2000}{16} = 125$$

άρα στο χωριό υπάρχουν 125 άτομα



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A** 1. Τι λέγεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

**Μονάδες 3**

2. Πώς ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων; ( $n$  θετικός ακέραιος)

**Μονάδες 4**

**B.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

$$(cf(x))' = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 8**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Αν  $A$  είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης  $f$  και υπάρχει  $x_0 \in A$  για το οποίο ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $A$ .

**Μονάδες 2**

2. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό της μέγιστο.

**Μονάδες 2**

3. Η διάμεσος της κανονικής κατανομής συμπίπτει με τη μέση τιμή της.

**Μονάδες 2**

4. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) είναι μέτρο σχετικής διασποράς.

**Μονάδες 2**

5. Η διακύμανση εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**Μονάδες 2**



**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \ln x$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

β. Να υπολογίσετε την παράγωγό της.

**Μονάδες 5**

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

**Μονάδες 7**

δ. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x) - 3}{x - 1}$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Ο χρόνος εργασίας 80 υπαλλήλων μιας εταιρείας, που εργάζονται από 5 έως 30 χρόνια, έχει ταξινομηθεί σε 5 ισοπλατείς κλάσεις. Είναι γνωστό ότι το ύψος του ορθογωνίου του ιστογράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τέταρτη κλάση είναι 30, η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι τετραπλάσια από τη συχνότητα της τρίτης κλάσης, η σχετική συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι 10% και ο αριθμός των υπαλλήλων που εργάζονται τουλάχιστον 15 χρόνια είναι 40.

α. Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών, αθροιστικών και αθροιστικών σχετικών).

**Μονάδες 8**

β. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.

**Μονάδες 8**

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται λιγότερο από 23 χρόνια.

**Μονάδες 4**

- δ. Πόσα το πολύ χρόνια πρέπει να εργάζεται ένας υπάλληλος, ώστε να είναι μεταξύ των 60 υπαλλήλων με τα λιγότερα χρόνια εργασίας;

**Μονάδες 5**

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, είναι

$$N(A) - N(B) = \frac{1}{5} N(\Omega)$$

Έστω R το εύρος του δείγματος των παρατηρήσεων:

$$P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$$

**A.** Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $0 < R \leq 1$

**Μονάδες 4**

**β.**  $R = P(A-B) + P(A' - B')$

**Μονάδες 7**

**B.** Αν η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 5P(A \cap B) + 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$  είναι συνεχής

στο  $\mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι:

**α.**  $P(B) = P(A \cap B) + \frac{2}{5}$

**Μονάδες 7**

**β.**  $R = 1$

**Μονάδες 4**

**γ.**  $P(A \cup B) = 1$  και  $P(A \cap B) = 0$

**Μονάδες 3**



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1°**

**A. 1.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 139.

**2.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 87.

**B.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

**Γ. 1 Σ, 2 Σ, 3 Σ, 4 Σ, 5 Λ**

**ΘΕΜΑ 2°**

**α.** Πρέπει  $x > 0$ , οπότε το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα  $A = (0, +\infty)$

**β.** Είναι

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x} \text{ με } x > 0$$

**γ.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $A = (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ .

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και άρα δεν έχει ακρότατα.

**δ.** Με  $x \neq 1$  είναι

$$\frac{xf'(x) - 3}{x - 1} = \frac{x\left(2x + \frac{1}{x}\right) - 3}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2(x + 1)$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + 1) = 4$$

**ΘΕΜΑ 3°**

Το εύρος του δείγματος είναι  $R = 30 - 5 = 25$  και το πλάτος των κλάσεων είναι

$$c \cong \frac{R}{\kappa} = \frac{25}{5} = 5.$$

Έτσι οι κλάσεις είναι:

$$[ 5, 10), [ 10, 15), [ 15, 20), [ 20, 25), [ 25, 30)$$

με κεντρικές τιμές αντίστοιχα:

$$7,5, 12,5, 17,5, 22,5, 27,5$$

Από τα υπόλοιπα δεδομένα προκύπτουν κατά σειρά οι σχέσεις:

$$v_4 = 30 \quad (1), \quad v_2 = 4 v_3 \quad (2), \quad f_1\% = 10 \quad (3) \quad \text{και} \quad v_3 + v_4 + v_5 = 40 \quad (4)$$

Ακόμα:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= v \\ \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= 80 \\ (4) \\ \Leftrightarrow v_1 + v_2 &= 40 \quad (5) \end{aligned}$$

Είναι

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow 10 = \frac{v_1}{80} \cdot 100 \Leftrightarrow v_1 = 8,$$

και η (5) δίνει  $v_2 = 32$ . Από την (2) βρίσκουμε  $v_3 = 8$  και από την (4)  $v_5 = 2$ , έτσι συμπληρώνουμε τη στήλη των  $v_i$ : 8, 32, 8, 30, 2 με σύνολο 80.

Οι σχετικές συχνότητες  $f_i\%$  προσδιορίζονται από τον τύπο  $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  και

είναι κατά σειρά: 10, 40, 10, 37,5, 2,5 με σύνολο 100.

Οι αθροιστικές συχνότητες  $N_i$  προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$N_1 = v_1, N_i = N_{i-1} + v_i, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

και είναι κατά σειρά: 8, 40, 48, 78, 80.

Πάλι, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες είναι:

$$F_1\% = f_1\%, F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

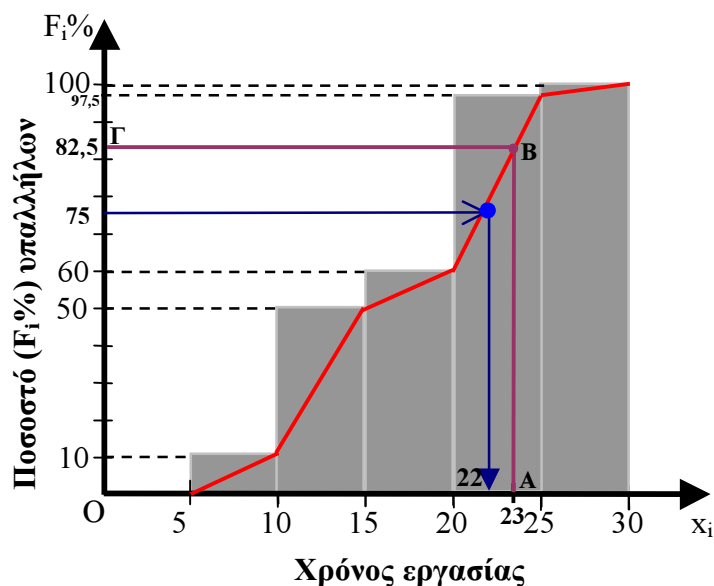
και βρίσκουμε κατά σειρά: 10, 50, 60, 97,5, 100.

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

**Πίνακας συχνοτήτων**

| Κλάσεις<br>[ - , - ) | Κεντρικές<br>Τιμές $x_i$ | Συχνότητες<br>$v_i$ | Σχετικές<br>συχνότητες $f_i\%$ | Αθροιστικές<br>συχνότητες $N_i$ | Αθροιστικές<br>σχετικές συχνότητες<br>$F_i\%$ |
|----------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------------------|
| [5, 10)              | 7,5                      | 8                   | 10                             | 8                               | 10                                            |
| [10, 15)             | 12,5                     | 32                  | 40                             | 40                              | 50                                            |
| [15, 20)             | 17,5                     | 8                   | 10                             | 48                              | 60                                            |
| [20, 25)             | 22,5                     | 30                  | 37,5                           | 78                              | 97,5                                          |
| [25, 30)             | 27,5                     | 2                   | 2,5                            | 80                              | 100                                           |
| <b>ΣΥΝΟΛΟ</b>        | —                        | 80                  | 100                            | —                               | —                                             |

- β. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο φαίνονται στο σχήμα:



- γ. 1<sup>ος</sup> **τρόπος**. Το ζητούμενο ποσοστό βρίσκεται από το πολύγωνο συχνοτήτων από τη διαδρομή ΑΒΓ. Ξεκινώντας από το σημείο Α(23, 0) πηγαίνουμε κάθετα στον άξονα Οx μέχρι το αθροιστικό διάγραμμα και μετά παράλληλα στον άξονα Οx μέχρι το σημείο Γ(0, 82,5). Η τεταγμένη 82,5 του Γ είναι το ζητούμενο ποσοστό.

2<sup>ος</sup> **τρόπος**. Το πλάτος του διαστήματος [20, 23) είναι τα  $\frac{3}{5}$  του πλάτους της κλάσης [20, 25), επομένως το ποσοστό των υπαλλήλων που αντιστοιχεί στο διάστημα [20, 23) είναι τα  $\frac{3}{5}$  του  $f_4\%$ , δηλαδή,  $\frac{3}{5} \cdot 37,5 = 22,5$  Έτσι το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + 22,5\% = 82,5\%$$

- δ. 1<sup>ος</sup> **τρόπος**. Επειδή  $60 = v_1 + v_2 + v_3 + 12$ , οι 60 υπάλληλοι με τα λιγότερα χρόνια εργασίας είναι αυτοί που ανήκουν στις τρεις πρώτες κλάσεις και οι πρώτοι 12 της τέταρτης κλάσης οι οποίοι καλύπτουν διάστημα πλάτους  $\frac{12}{30} \cdot 5 = 2$ . Επομένως τα ζητούμενα χρόνια είναι  $20 + 2 = 22$ .

2<sup>ος</sup> **τρόπος**. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με την παρατήρηση ότι οι 60 υπάλληλοι είναι το 75% του συνόλου, και εργαζόμαστε με το αθροιστικό διάγραμμα (μπλε διαδρομή στο σχήμα), όπως υποδεικνύει το σχολικό βιβλίο στην εφαρμογή της σελίδας 77

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Η ισότητα  $N(A) - N(B) = \frac{1}{5}N(\Omega)$  δίνει  $\frac{N(A)}{N(\Omega)} - \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}$  ή  $P(A) - P(B) = \frac{1}{5}$  ή

$$P(A) = P(B) + \frac{1}{5} \quad (1)$$

Έτσι,  $P(B) < P(A)$ . Επειδή

$$A \cap B \subseteq B \text{ και } A \subseteq A \cup B$$

έχουμε

$$P(A \cap B) \leq P(B) \text{ και } P(A) \leq P(A \cup B)$$

Επομένως

$$P(A \cap B) \leq P(B) < P(A) \leq P(A \cup B) \quad (2)$$

οπότε

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) \quad (3)$$

**α.** Από την (2) είναι:

$$P(A \cap B) < P(A \cup B) \Leftrightarrow 0 < P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0 < R$$

Ακόμα

$$P(A \cup B) \leq 1 \text{ και } P(A \cap B) \geq 0, \text{ οπότε } P(A \cup B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow R \leq 1$$

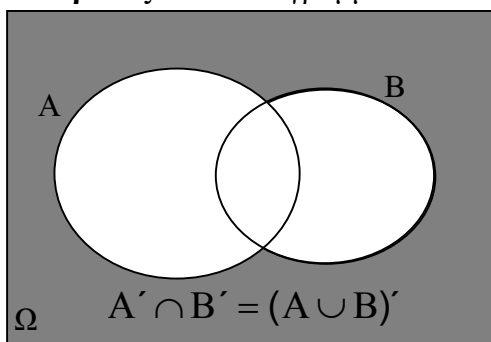
Άρα

$$0 < R \leq 1$$

**β.** Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} R &= P(A \cup B) - P(A \cap B) = [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A - B) + P(B \cap A') \quad [ \text{τύπος: } B - A = B \cap A' ] \\ &= P(A - B) + P(A' \cap B) \\ &= P(A - B) + P(A' \cap (B')') \\ &= P(A - B) + P(A' - B') \end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος.** Από διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι  $A' \cap B' = (A \cup B)'$



Είναι:

$$\begin{aligned} P(A - B) + P(A' - B') &= P(A - B) + P(A') - P(A' \cap B') \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + [1 - P(A)] - [1 - P(A \cup B)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) + 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= R \end{aligned}$$

**Β α.** Η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  ή

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5P(A \cap B) + 3 \quad (4)$$

Με  $x \neq 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x - 1} &\stackrel{(1)}{=} \frac{5 \left[ P(B) + \frac{1}{5} \right] x - 5P(B) - 1}{x - 1} \\ &= \frac{5P(B)x + x - 5P(B) - 1}{x - 1} \\ &= \frac{5P(B)(x - 1) + x - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)[5P(B) + 1]}{x - 1} \\ &= 5P(B) + 1 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [5P(B) + 1] = 5P(B) + 1$$

και η (4) δίνει, τελικά, το ζητούμενο:  $5P(B) + 1 = 5P(A \cap B) + 3$  ή

$$P(B) = P(A \cap B) + \frac{2}{5} \quad (5)$$

**β.** Η (1) λόγω της (5) δίνει:

$$P(A) = P(A \cap B) + \frac{3}{5}$$

Από την (3) προκύπτει:

$$\begin{aligned} R = P(A \cup B) - P(A \cap B) &= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= P(A \cap B) + \frac{3}{5} + P(A \cap B) + \frac{2}{5} - 2P(A \cap B) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**γ.** Αν υποθέσουμε ότι  $P(A \cup B) < 1$ , τότε θα είναι

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) < 1, \text{ άτοπο, από το Ββ,}$$

και επειδή  $P(A \cup B) \leq 1$  απομένει:

$$P(A \cup B) = 1.$$

Τέλος

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.$$



08  
επαναληπτικά  
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΠΙΛΟΓΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Τι ονομάζεται εύρος ή κύμανση  $R$  ενός δείγματος παρατηρήσεων και τι μειονέκτημα παρουσιάζει;

**Μονάδες 3**

**A2.** Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  ο δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας του απλού ενδεχομένου  $\{\omega_i\}$ .

**Μονάδες 4**

**A3.** Αν η  $f(x) = x^2$  παραγωγίσιμη συνάρτηση, να δείξετε ότι η παράγωγός της είναι  $f'(x) = 2x$ .

**Μονάδες 8**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε ισχύει  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  θα είναι  $f'(x_0)$  δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της  $f(x)$  ως προς  $x$  όταν  $x = x_0$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου  $A$  συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου  $B$  τότε  $A \subseteq B$ .

**Μονάδες 2**

**δ.** Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

**Μονάδες 2**

**ε.** Ο δειγματικός χώρος κάθε πειράματος τύχης αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

**Μονάδες 2**



**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Μονάδες 6**

β. Να βρείτε το σημείο  $M(x, f(x))$  στο οποίο η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον  $x'x$ .

**Μονάδες 5**

γ. Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$

**Μονάδες 6**

δ. Έστω  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $x$ , ενός δείγματος μεγέθους  $n=40$ . Αν  $\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  να συμπληρωθεί ο πίνακας:

| $X_i$         | $v_i$    | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------------|----------|-------|-------|-------|
| 1             | 4        |       |       |       |
| 2             | $\kappa$ |       |       |       |
| 3             |          |       |       |       |
| 4             |          | 0,2   |       |       |
| <b>Σύνολο</b> |          | 1     |       |       |

**Μονάδες 8**

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

«Σε μια εταιρία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι στο διοικητικό ή στο τεχνικό τμήμα. Από αυτούς οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα εργάζονται στο διοικητικό τμήμα ενώ 10 γυναίκες εργάζονται στο τεχνικό τμήμα. Η μέση ηλικία τόσο των ανδρών όσο και των γυναικών είναι 40 χρόνια.»

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρία. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Το άτομο είναι άνδρας που εργάζεται στο τεχνικό τμήμα»

B: «Το άτομο είναι άνδρας ή εργάζεται στο διοικητικό τμήμα»

**Μονάδες 7**

β. Κάποιοι υπάλληλοι αποχώρησαν από την εταιρία η οποία κάλυψε το κενό τους προσλαμβάνοντας για κάθε άτομο που αποχώρησε, ένα νεότερο κατά 4 χρόνια. Αν η νέα μέση ηλικία των υπαλλήλων της εταιρίας είναι 39,6 χρόνια, να βρείτε πόσοι υπάλληλοι αποχώρησαν.

**Μονάδες 6**

- γ. Αν είναι γνωστό ότι η κατανομή των 100 αρχικών ηλικιών είναι περίπου κανονική και το 2,5% των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, να βρείτε πόσοι υπάλληλοι της εταιρείας έχουν ηλικία μικρότερη από 33 χρόνια.

**Μονάδες 6**

- δ. Αν ισχύει  $100 \sum_{i=1}^K v_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^K v_i x_i)^2 = 250000$  μετά την πρόσληψη των νεότερων ατόμων και η κατανομή των ηλικιών εξακολουθεί να είναι κανονική, να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος της κατανομής των ηλικιών των υπαλλήλων της εταιρείας.

$$\text{Δίνεται } S^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^K v_i x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^K v_i x_i)^2}{v} \right].$$

**Μονάδες 6**

### Θέμα 4<sup>ο</sup>

«Εστω πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  και  $m$  η ελάχιστη τιμή της μέσης τιμής των αριθμών  $x, 5e^x, x+4, -7x, 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Επιλέγουμε τυχαίο  $\kappa \in \Omega$  και σχηματίζουμε τη συνάρτηση  $g(x) = mx^2 - \kappa^2 x + 3$  ( $x \in \mathbb{R}$ )»

- A. Να δείξετε ότι  $m=2$ .

**Μονάδες 9**

- B. Θεωρούμε το ενδεχόμενο  $E = \{\kappa \in \Omega / \text{«η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης } g \text{ στο σημείο της } A(1, g(1)) \text{ δεν είναι παράλληλη στον άξονα } x'x\}\}$ . Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου  $E$ .

**Μονάδες 8**

- Γ. Αν  $A, B$  ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ ,  $A \neq B$ , να δειχτεί ότι  $h(x) = \frac{3 - 2 \cdot P(A \cap B)}{12} x^3 + \frac{P(A)}{2} x^2 + x + 2008$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**



**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΠΙΛΟΓΗΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ**  
**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.1.** Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 92  
**A.2.** Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 149  
**A.3.** Απόδειξη από Σχ. Βιβλίο σελ. 28-29  
**B.**  $\alpha \rightarrow$  Λάθος  
 $\beta \rightarrow$  Σωστό  
 $\gamma \rightarrow$  Σωστό  
 $\delta \rightarrow$  Λάθος  
 $\varepsilon \rightarrow$  Λάθος

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- α)** Πρέπει  $x+2 \geq 0$  και  $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$   
 $x \geq -2$  και έστω  $\sqrt{x+2}-2 = 0$   
τότε  $\sqrt{x+2} = 2$   
 $x+2 = 4$   
 $x = 2$   
Άρα  $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$  όταν  $x \neq 2$ .

Οπότε το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$ .

- β)** Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει  $f(x)=0$ . Άρα:  
 $x^2 - 4 = 0$  και  $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$   
 $x^2 = 4$  και  $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$   
 $x = \pm 2$  και  $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$   
Άρα  $x = -2$ .

Οπότε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον  $x'$  είναι το  $M(-2, 0)$ .

**γ)** 
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x+2-4} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} = (x+2)(\sqrt{x+2} + 2)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) = (2+2)(\sqrt{4}+2) = 4 \cdot 4 = 16$$

δ) Ο πίνακας γίνεται:

| $x_i$         | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| 1             | 4     | 0,1   | 4     | 0,1   |
| 2             | 16    | 0,4   | 20    | 0,5   |
| 3             | 12    | 0,3   | 32    | 0,8   |
| 4             | 8     | 0,2   | 40    | 1     |
| <b>Σύνολο</b> | 40    | 1     | -     | -     |

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$N_1 = v_1 = 4$$

$$F_1 = f_1 = 0,1$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{16}{40} = 0,4, \quad N_2 = v_1 + v_2 = 4 + 16 = 20$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow v_4 = f_4 \cdot v = 0,2 \cdot 40 = 8$$

$$N_4 = v = 40 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow 4 + 16 + v_3 + 8 = 40 \Rightarrow v_3 = 40 - 28 = 12$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{12}{40} = 0,3, \quad N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 12 = 32$$

$$F_3 = F_2 + f_3 = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

α) Στον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου» καταγράφουμε τα δεδομένα μας.

| Φύλλο \ Τμήμα | Διοικητικό τμήμα | Τεχνικό τμήμα | Σύνολο |
|---------------|------------------|---------------|--------|
| Άνδρες        | 10               | 50            | 60     |
| Γυναίκες      | 30               | 10            | 40     |
| Σύνολο        | 40               | 60            | 100    |

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0,5$$

$B_1$ : «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να είναι άνδρας»

$B_2$ : «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να εργάζεται στο διοικητικό τμήμα».

$$B = (B_1 \cup B_2) \Rightarrow P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{60}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9$$

β) Το άθροισμα των ηλικιών όλων των υπαλλήλων θα είναι:

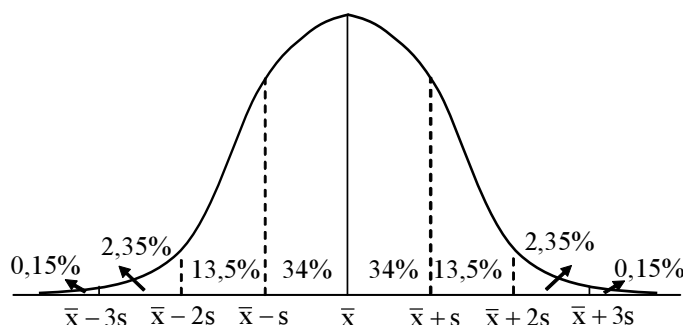
$$\sum_{i=1}^{100} t_i = 60 \cdot 40 + 40 \cdot 40 = 2400 + 1600 = 4000$$

Μετά την πρόσληψη των νεότερων υπαλλήλων το άθροισμα των ηλικιών των υπαλλήλων θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i \quad \text{άρα} \quad \sum_{i=1}^v t_i = v \cdot \bar{y} \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{100} t_i = 100 \cdot 39,6 = 3960$$

Έστω  $c$  το πλήθος των ατόμων που αποχώρησαν. Επειδή θα προσληφθούν  $c$  άτομα αλλά κατά 4 χρόνια νεότερα, θα ισχύει ότι:  $4000 - 3960 = 4c$  δηλαδή  $4c = 40$  άρα  $c = 10$

γ) Η καμπύλη συχνοτήτων στην κανονική κατανομή είναι:

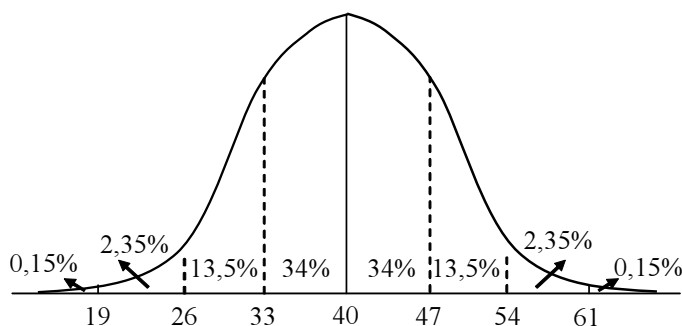


Επειδή το 2,5% (δηλαδή  $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ ) των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια,  $\bar{x} - 2s = 26$  **(1)**

Η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων είναι:  $\bar{x} = \frac{60 \cdot 40 + 40 \cdot 40}{100} = 40$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε:  $2s = 14 \Leftrightarrow s = 7$ .

Επομένως η καμπύλη συχνοτήτων θα είναι:



Κάτω από 33 χρόνια θα είναι το  $13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%$  των υπαλλήλων της εταιρίας δηλ.  $\frac{16}{100} \cdot 100 = 16$  υπάλληλοι.

$$\delta) \quad \text{Είναι: } s^2 = \frac{1}{100} \left[ \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100} \right] \Leftrightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i^2}{100} - \frac{\left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100^2} \Leftrightarrow$$

$$100^2 s^2 = 100^2 \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i^2}{100} - 100^2 \frac{\left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100^2} \Leftrightarrow 100^2 s^2 = 100 \cdot \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 10000 s^2 = 250000 \Leftrightarrow S^2 = 25 \Leftrightarrow S = 5$$

Στην κανονική κατανομή το εύρος  $R \approx 6s$ , επομένως  $R \approx 30$ .

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

A. Είναι:  $x = \frac{x + 5e^x + x + 4 - 7x + 1}{5} = \frac{5e^x - 5x + 5}{5} = e^x - x + 1$

Έστω  $f(x) = e^x - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x - 1$ .

Έχουμε  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

|         |                                                                                   |          |                                                                                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|         | $-\infty$                                                                         | $0$      | $+\infty$                                                                         |
| $x$     |                                                                                   |          |                                                                                   |
| $f'(x)$ | -                                                                                 | 0        | +                                                                                 |
| $f(x)$  |  | 2<br>min |  |

Για  $x=0$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $m = f(0) = 2$

B. Για  $m=2$  είναι:  $g(x) = 2x^2 - \kappa^2 x + 3$ .

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = 4x - \kappa^2$ .

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $A(1, g(1))$  είναι παράλληλη στον  $x'x$  όταν  $g'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$\kappa = 2$  ή  $\kappa = -2$  (απορρίπτεται αφού  $\kappa \in \Omega$ )

Άρα  $\kappa = 2$ .

$$E = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{Οπότε } P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{6}{7}$$

Γ. Αφού  $A \subseteq B$  τότε  $A \cap B = A$  και  $P(A \cap B) = P(A)$  οπότε

$$h(x) = \frac{3 - 2 \cdot P(A)}{12} x^3 + \frac{P(A)}{2} x^2 + x + 2008, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = \frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} x^2 + P(A) \cdot x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

και

$$\Delta = P^2(A) - 4 \cdot \frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} \cdot 1 = P^2(A) - 3 + 2 \cdot P(A) = P^2(A) + 2 \cdot P(A) + 1 - 4 = (P(A) + 1)^2 - 4 < 0 \text{ γιατί:}$$

Το ενδεχόμενο  $A$  αποκλείεται να είναι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  (διότι αν ήταν, θα έπρεπε και  $B = \Omega$ , άτοπο αφού  $A \neq B$ ) άρα  $P(A) \neq 1$  και επειδή  $0 \leq P(A) \leq 1$  έπεται ότι  $0 \leq P(A) < 1$  άρα  $P(A) + 1 < 2$  οπότε  $(P(A) + 1)^2 < 4$ .

(εναλλακτικά: το τριώνυμο  $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$  έχει  $\Delta' = 16$  και ρίζες τις  $-3$  και  $1$  οπότε για  $P(A) \in [0, 1)$  είναι  $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3 < 0$ ).

Αφού  $\Delta < 0$  η  $h'(x)$  παίρνει τιμές ομόσημες του  $\frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}$  για κάθε  $x \in R$   
και αφού  $\frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}$  φανερά θετικό, έχω  $h'(x) > 0$  για κάθε  $x \in R$ , άρα η  
συνάρτηση  $h$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $R$ .





## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A.** Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , να δείξετε ότι  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

*Μονάδες 9*

- B.** **α.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

*Μονάδες 3*

- β.** Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ;

*Μονάδες 3*

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $(\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{x}}{2x}$ .

*Μονάδες 2*

- β.** Όταν ένα δείγμα τιμών ακολουθεί ασύμμετρη κατανομή με θετική ασυμμετρία τότε ισχύει  $\delta > \bar{x}$ .

*Μονάδες 2*

- γ.** Η μέση τιμή που βρίσκουμε σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι πάντα ίδια με αυτήν που είχαμε πριν την ομαδοποίηση.

*Μονάδες 2*

- δ.** Μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως φθίνουσα όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

*Μονάδες 2*

- ε.** Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Αν  $P(A) \leq P(B)$  τότε κατ' ανάγκη ισχύει  $A \subseteq B$ .

*Μονάδες 2*

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Την 29<sup>η</sup> Μαρτίου στις 4 π.μ. οι θερμοκρασίες 20 πόλεων σε βαθμούς Κελσίου, ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους και δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

| Κλάσεις σε<br>βαθμούς<br>°C | $v_i$ |
|-----------------------------|-------|
| [0,2)                       | 2     |
| [2,4)                       | 4     |
| [4,6)                       | 6     |
| [6,8)                       | 8     |

- α) Να βρεθεί η μέση θερμοκρασία των πόλεων σε βαθμούς °C.

*Μονάδες 6*

- β) Να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και να εκτιμηθεί η διάμεσος της θερμοκρασίας.

*Μονάδες 7*

- γ) Να υπολογίσετε την διακύμανση και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

*Μονάδες 6*

- δ) Να βρεθεί τα ποσοστό των πόλεων με θερμοκρασία από 3 έως και 7 βαθμούς °C.

*Μονάδες 6*

$$\Deltaίνεται \quad s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω δειγματικός χώρος  $\Omega$  με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα όπου  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$  και η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \kappa x + 9$ ,  $\kappa \in \Omega$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επιλέγουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

$$A = \{ \kappa \in \Omega / \kappa \text{ πολλαπλάσιο του } 3 \}$$

$$B = \{ \kappa \in \Omega / \eta \text{ } f \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες} \}$$

$$\Gamma = \{ \kappa \in \Omega / \text{το όριο } \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{x^2 - \kappa x}{\sqrt{x} - \sqrt{\kappa}} \leq 16\sqrt{\kappa} \}$$

α) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A, B, Γ.

Μονάδες 6

β) Να βρεθούν οι πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(\Gamma)$ .

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι  $P(B) = \frac{1}{5}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{25}$ .

Μονάδες 6

δ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A \cup B)$ ,  $P(A \cup B')$ ,  $P(B - A')$ .

Μονάδες 7

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{P(A \cup B)}{2[P(A) + P(B)]} \cdot x^2 + \frac{P(B - A)}{P(A) + P(B)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

για την οποία είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $K(1, f(1))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x + 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 7

β) Αν  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$  και η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο  $\Lambda\left(0, \frac{1}{3}\right)$  να υπολογιστούν  $P(A)$  και  $P(B)$ .

Μονάδες 6

γ) Αν  $P(A) = \frac{1}{2}$  και  $P(B) = \frac{1}{4}$  να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης  $g(x) = 6f(x) - 12x + 2019$ .

Μονάδες 6

δ) Αν (ε) η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $K(1, f(1))$  και  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2), \dots, M_{10}(x_{10}, y_{10})$  10 σημεία της (ε) που οι τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  έχουν μέση τιμή  $-\frac{59}{6}$  και τυπική απόκλιση  $S_x = 2$  να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων τους.

Μονάδες 6



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ. 152
- B. α) Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ 13  
β) Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ 139
- Γ. α) ΣΩΣΤΟ  
β) ΛΑΘΟΣ  
γ) ΛΑΘΟΣ  
δ) ΣΩΣΤΟ  
ε) ΛΑΘΟΣ

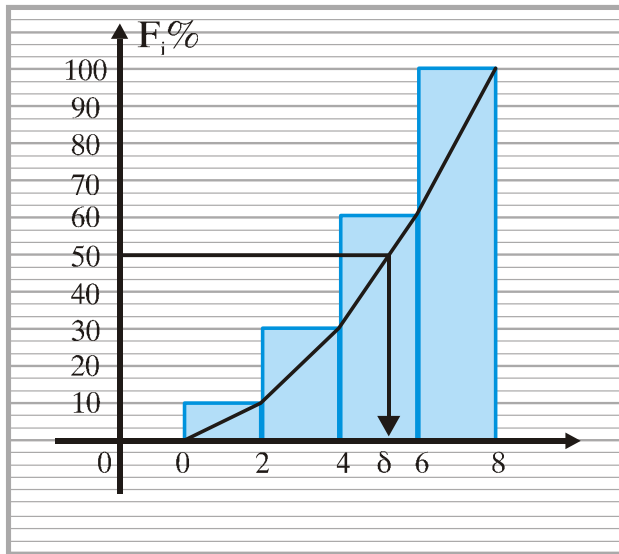
#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

A)

| [ - )         | $x_i$ | $v_i$       | $f_i\%$    | $F_i\%$ | $x_i v_i$  | $x_i^2 \cdot v_i$ |
|---------------|-------|-------------|------------|---------|------------|-------------------|
| [0 - 2)       | 1     | 2           | 10         | 10      | 2          | 2                 |
| [2 - 4)       | 3     | 4           | 20         | 30      | 12         | 36                |
| [4 - 6)       | 5     | 6           | 30         | 60      | 30         | 150               |
| [6 - 8)       | 7     | 8           | 40         | 100     | 56         | 392               |
| <b>Σύνολο</b> |       | <b>v=20</b> | <b>100</b> |         | <b>100</b> | <b>580</b>        |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{100}{20} = 5^\circ \text{C}$$

β)



η διάμεσος είναι περίπου 5

γ)

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^4 x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^4 x_i v_i \right)^2}{v} \right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i^2 v_i - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{580}{20} - 5^2 = 29 - 25 = 4 \Rightarrow \boxed{s = 2^\circ \text{C}}$$

$$Cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ ή } 40\% > 10\% \text{ το δείγμα είναι ανομοιογενές.}$$

δ) Το πλήθος των πόλεων με θερμοκρασίες από  $3^\circ \text{C}$  έως και  $7^\circ \text{C}$  είναι οι μισές πόλεις της δεύτερης κλάσης, όλες της τρίτης και οι μισές της 4<sup>ης</sup> διότι το 3 είναι το κέντρο της 2<sup>ης</sup> και το 7 το κέντρο της 4<sup>ης</sup> και οι παρατηρήσεις (πόλεις) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις. Άρα το ποσοστό είναι:

$$\frac{1}{2} 20\% + 30\% + \frac{1}{2} 40\% = 60\% \text{ των πόλεων.}$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α)  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$ , ισοπίθανα,  $N(\Omega) = 25$

$$A = \{k \in \Omega / k \text{ πολ/σίο του } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\} \quad N(A) = 8$$

$$B = \{k \in \Omega / \eta f \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες}\}$$

$$\text{Αφού } f(x) = x^2 - kx + 9 \text{ θα πρέπει } \Delta < 0 \Leftrightarrow k^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow (k-6)(k+6) < 0$$

Άρα  $-6 < k < 6$ . Επειδή όμως  $k \in \Omega$  θα πρέπει  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  έτσι  $N(B) = 5$

$$\Gamma = \left\{ k \in \Omega / \text{το } \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^2 - kx}{\sqrt{x} - \sqrt{k}} \leq 16\sqrt{k} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{x^2 - \kappa x}{\sqrt{x} - \sqrt{\kappa}} &= \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{(x^2 - \kappa x)(\sqrt{x} + \sqrt{\kappa})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{\kappa})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{x(x - \kappa)(\sqrt{x} + \sqrt{\kappa})}{x - \kappa} = \lim_{x \rightarrow \kappa} x(\sqrt{x} + \sqrt{\kappa}) = 2\kappa\sqrt{\kappa} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε  $2\kappa\sqrt{\kappa} \leq 16\sqrt{\kappa} \Leftrightarrow \kappa \leq 8$ .

Επειδή  $\kappa \in \Omega$  έχουμε  $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Άρα  $N(\Gamma) = 8$ .

$$\beta) \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25} = 32\%$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25} = 32\%$$

$$\gamma) \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{25} = 20\%$$

$$A \cap B = \{3\} \quad \text{άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{25} = 4\%$$

$$\delta) \quad \bullet \quad P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{8}{25} + \frac{5}{25} - \frac{1}{25} = \frac{12}{25} = 48\%$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(A \cup B') &= P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - \frac{5}{25} + \frac{1}{25} = \frac{21}{25} = 84\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(B - A') &= P(B) - P(B \cap A') = P(B) - P(B - A) = \\ &= P(B) - P(B - A) = P(B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{1}{25} = 4\% \end{aligned}$$

**ΣΧΟΛΙΟ:** Δεκτές είναι και οι λύσεις με την χρήση των διαγραμμάτων Venn

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

**α)** Αφού η εφαπτομένη στο  $K(1, f(1))$  είναι παράλληλη στην  $(\delta)$ :  $y = x + 1$  πρέπει  $\lambda_{\varepsilon_K} = \lambda_{\delta} \Leftrightarrow f'(1) = 1$

$$\text{Έχουμε } f(x) = \frac{P(A \cup B)}{2[P(A) + P(B)]} \cdot x^2 + \frac{P(B - A)}{P(A) + P(B)}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} \cdot x \quad \text{οπότε}$$

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} = 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Άρα  $P(A \cap B) = 0$  και επειδή ο δ.χ.  $\Omega$  αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα θα είναι και  $A \cap B = \emptyset$  δηλαδή τα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα.

β) Αφού  $\Lambda\left(0, \frac{1}{3}\right) \in C_f \Rightarrow f(0) = \frac{1}{3}$  όμως  $f(0) = \frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)}$  οπότε

$$\frac{1}{3} = \frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)} \Leftrightarrow 3P(B-A) = P(A)+P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3[P(B)-P(A \cap B)] = P(A)+P(B) \Leftrightarrow P(A) = 2P(B)$$

όμως

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) \Leftrightarrow 3P(B) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } P(A) = \frac{1}{2}.$$

γ) Έχουμε  $g(x) = 6f(x) - 12x + 2019$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και

$$g'(x) = 6f'(x) - 12 \text{ έτσι}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cup B)}{P(A)+P(B)} \cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$(\text{αφού } P(A \cup B) = P(A) + P(B))$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 2 \Leftrightarrow x > 2$$

| x       | $-\infty$                                                                           | 2 | $+\infty$                                                                            |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $g'(x)$ | -                                                                                   | 0 | +                                                                                    |
| $g(x)$  |  |   |  |

Ο.Ε.

η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για  $x=2$  την  $g(2)=6f(2)-24+2019$

όμως

$$f(2) = \frac{P(A \cup B)}{2[P(A)+P(B)]} \cdot 4 + \frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)} = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ άρα } g(2)=2009.$$

δ) Έχουμε  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$  και  $f'(x) = x$

Έστω  $y = \alpha x + \beta$  η εφαπτόμενη ( $\epsilon_K$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

Πρέπει  $\alpha = f'(1) = 1$  άρα ( $\epsilon_K$ ):  $y = x + \beta$

$$\text{Αφού } K(1, f(1)) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{6}. \text{ Επομένως } \epsilon_K : \boxed{y = x - \frac{1}{6}}$$

$$\text{Είναι } M_i \in (\epsilon_K) \Leftrightarrow y_i = x_i - \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$\text{Άρα } \bar{y} = \bar{x} - \frac{1}{6} = -\frac{59}{6} - \frac{1}{6} = -10 \text{ και } s_y = s_x = 2 \text{ οπότε } CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{10} = 20\%$$



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Αν  $f(x)$  και  $g(x)$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις, να δείξετε ότι για την συνάρτηση  $F(x) = f(x) + g(x)$  ισχύει  $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

*Μονάδες 9*

- B. α. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας για ένα ενδεχόμενο  $A$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

*Μονάδες 3*

- β. Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  της τιμής  $x_i$  μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ ;

*Μονάδες 3*

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 \in A$  όταν  $f(x) \geq f(x_1)$  για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_1$ .

*Μονάδες 2*

- β. Το τόξο  $\alpha_i$  ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων είναι ίσο με  $\alpha_i = 360^\circ \cdot v_i$ .

*Μονάδες 2*

- γ. Αν  $A, B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα δύο είναι  $(A \cup B)'$ .

*Μονάδες 2*

- δ. Ισχύει: 
$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

*Μονάδες 2*

- ε. Το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα μπορεί να διαφέρει από τα αντίστοιχα δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν.

*Μονάδες 2*



**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x + \sqrt{a + 15}$ , όπου  $a$  μια σταθερά με  $a \geq -15$ .

**A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$

*Μονάδες 3*

**B.** Να βρείτε:

**α.** την  $f'(x)$ .

*Μονάδες 5*

**β.** το  $\lim_{x \rightarrow -1} \left[ f'(x) \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right]$ .

*Μονάδες 5*

**Γ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f(x)$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x$  είναι  $y = x + \sqrt{a + 15}$ .

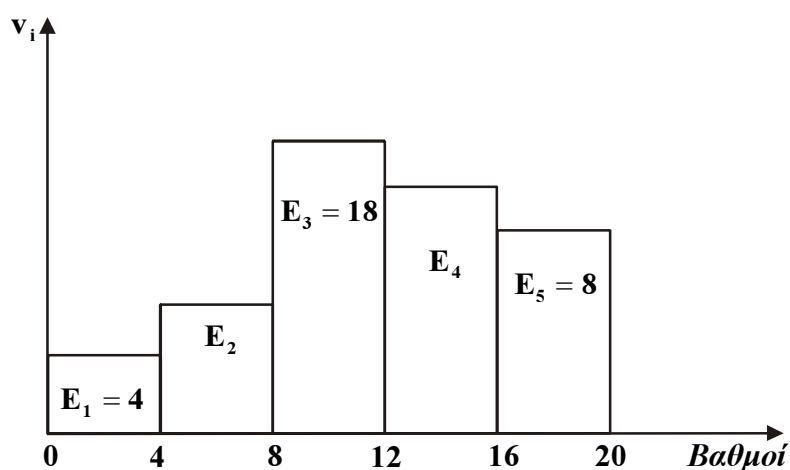
*Μονάδες 6*

**Δ.** Να βρείτε την τιμή του  $a$  αν η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων της ευθείας ( $\epsilon$ ) τα οποία έχουν τετμημένες  $0, 1, 9, 10$  είναι  $50$ .

*Μονάδες 6*

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων δείχνει τις βαθμολογίες των μαθητών της Γ' Λυκείου ενός σχολείου, σε ένα διαγώνισμα. Μέσα στα ορθογώνια που έχουν βάση ίση με τη μονάδα δίνονται τα εμβαδά τριών από αυτά.



Αν  $N_4 = 6v_2$  και το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι  $50$ , τότε:

**A.** Να βρείτε το πλήθος των μαθητών.

*Μονάδες 3*

- B.** Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

*Μονάδες 10*

- Γ.** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της Γ' Λυκείου του σχολείου να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων.

- α.** Ο βαθμός του γραπτού να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 10 και μικρότερος του 17.

*Μονάδες 6*

- β.** Ο βαθμός του γραπτού να είναι κάτω από 10 ή τουλάχιστον 16.

*Μονάδες 6*

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω  $\Omega = \{2, 3, 6, \kappa, \lambda, \mu\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο  $A = \{\kappa, \lambda, \mu\}$ , ώστε να ισχύουν:  $P(A) = \frac{1}{2}$  και

$$2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(\kappa) = \frac{P(\lambda)}{2}.$$

- A.** Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ .

*Μονάδες 5*

- B.** Να βρείτε τα  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  αν η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\lambda}{3}x^3 - 12x^2 + 20x + 2010$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  με συντελεστή 48 ενώ τα  $\kappa$  και  $\mu$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της με  $\kappa$  μικρότερο του  $\mu$ .

*Μονάδες 4*

- Γ.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{2x^2 - 32}{\sqrt{2x - 3} - \sqrt{5}}$ .

Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $\Delta$  της  $g(x)$  και στη συνέχεια τα στοιχεία του ενδεχομένου  $B$  όταν:  $B = \{x \in \Omega \text{ και } x \in \Delta\}$ .

*Μονάδες 4*

- Δ.** Σε ένα δείγμα 160 παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή οι 4 από αυτές είναι μεγαλύτερες από το 20 ενώ το εύρος  $R$  των παρατηρήσεων είναι ίσο με τα  $\frac{3}{4}$  της μέσης τιμής  $\bar{x}$ .

Να βρείτε το ενδεχόμενο  $\Gamma = \{c \in \Omega \text{ ώστε ο } c \text{ προστιθέμενος σε όλες τις παρατηρήσεις να γίνεται το δείγμα ομοιογενές}\}$ .

*Μονάδες 4*

- E.** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap \Gamma$ ,  $B - \Gamma$ ,  $A \cup \Gamma$ ,  $B \cup A'$ .

*Μονάδες 8*



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A.** Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)
- B.** α. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)  
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)
- Γ.** α. Λάθος  
β. Λάθος  
γ. Σωστό  
δ. Λάθος  
ε. Σωστό

#### ΘΕΜΑ 2

- A.** Πρέπει  $x^2 + 1 \geq 0$ , το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  έτσι  $A = \mathbf{R}$
- B.** α.  $f'(x) = (\ln(x^2 + 1) + x + \sqrt{a+15})' = \frac{2x}{x^2+1} + 1 = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$
- β.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left[ f'(x) \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right) =$
- $$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x-2) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-1+1}{-1-2} = \frac{0}{-3} = 0.$$
- Γ.** Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την  $C_f$ .  
Αφού  $(\varepsilon) // (\eta)$  πρέπει:  $f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 + 1 \Rightarrow$   
 $2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$   
Αφού  $f(0) = \ln 1 + \sqrt{a+15} = \sqrt{a+15}$ , το σημείο επαφής είναι  $M(0, \sqrt{a+15})$   
Έτσι  $(\varepsilon): y = f'(0) \cdot x + \beta$  δηλαδή  $(\varepsilon): y = x + \beta$   
Όμως  $M \in (\varepsilon) \Rightarrow \sqrt{a+15} = 0 + \beta \Rightarrow \beta = \sqrt{a+15}$  έτσι  $(\varepsilon): y = x + \sqrt{a+15}.$
- Δ.** για  $x_1 = 0$  έχω  $y_1 = \sqrt{a+15}$   
για  $x_2 = 1$  έχω  $y_2 = 1 + \sqrt{a+15}$   
για  $x_3 = 9$  έχω  $y_3 = 9 + \sqrt{a+15}$   
για  $x_4 = 10$  έχω  $y_4 = 10 + \sqrt{a+15}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$$\sqrt{a+15}, \sqrt{a+15}+1, \sqrt{a+15}+9, \sqrt{a+15}+10$$

$$\delta = \frac{\sqrt{a+15}+1+\sqrt{a+15}+9}{2} = \frac{2\sqrt{a+15}+10}{2} = \sqrt{a+15}+5$$

$$\text{Αφού } \delta = 50 \Rightarrow \sqrt{a+15}+5 = 50 \Rightarrow \sqrt{a+15} = 45 \Rightarrow a+15 = 2025 \Rightarrow a = 2010$$

### ΘΕΜΑ 3

- A.** Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος  $n$ , έτσι  $n = 50$ .
- B.** Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

| Κλάσεις<br>[ - ) | $x_i$ | $v_i$    | $f_i$ | $f_i \%$ | $N_i$ | $F_i$ | $F_i \%$ |
|------------------|-------|----------|-------|----------|-------|-------|----------|
| 0 - 4            | 2     | 4        | 0,08  | 8        | 4     | 0,08  | 8        |
| 4 - 8            | 6     | 7        | 0,14  | 14       | 11    | 0,22  | 22       |
| 8 - 12           | 10    | 18       | 0,36  | 36       | 29    | 0,58  | 58       |
| 12 - 16          | 14    | 13       | 0,26  | 26       | 42    | 0,84  | 84       |
| 16 - 20          | 18    | 8        | 0,16  | 16       | 50    | 1     | 100      |
| Σύνολο           | —     | $n = 50$ | 1     | 100      |       |       |          |

$$\text{Αφού } n = 50 \Rightarrow N_4 + v_5 = 50 \Rightarrow 6v_2 + 8 = 50 \Rightarrow 6v_2 = 42 \Rightarrow v_2 = 7$$

$$N_4 = 42 \Rightarrow 4 + 7 + 18 + v_4 = 42 \Rightarrow v_4 = 13$$

- Γ. α. A:** «ο μαθητής έχει βαθμό από 10 έως 17» τότε

$$N(A) = \frac{1}{2} \cdot v_3 + v_4 + \frac{1}{4} \cdot v_5 = 9 + 13 + 2 = 24 \text{ οπότε}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{50} = 0,48 \text{ ή } 48\%$$

- β. B:** «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από 10 ή τουλάχιστον 16»

$$N(B) = v_1 + v_2 + \frac{1}{2}v_3 + v_5 = 4 + 7 + 9 + 8 = 28. \text{ Έτσι}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{28}{50} = 0,56 \text{ ή } 56\%$$

### ΘΕΜΑ 4

- A.** Έχουμε:  $2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(k) = \frac{P(\lambda)}{2} = \theta \in R$

$$\text{Αφού } P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta + 2\theta + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(\mu) = \frac{1}{2} - 3\theta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(2) + P(3) + P(6) + P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = 1 \Rightarrow^{(1)}$$

$$\frac{\theta}{2} + 3\theta + \theta + \theta + 2\theta + \frac{1}{2} - 3\theta = 1 \Rightarrow$$

$$4\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{Έτσι: } P(2) = \frac{1}{18}, P(3) = \frac{1}{3}, P(6) = \frac{1}{9}, P(\kappa) = \frac{1}{9}, P(\lambda) = \frac{2}{9}, P(\mu) = \frac{1}{6}$$

**B.**  $f'(x) = \lambda x^2 - 24x + 20$

$$\text{Αφού η } (\epsilon) // (\eta) \Rightarrow f'(-1) = 48 \Rightarrow \lambda + 44 = 48 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$\text{Έτσι } f'(x) = 4x^2 - 24x + 20$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 20 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$$

| x       | $-\infty$                                                                         | 1                                                                                 | 5                                                                                  | $+\infty$ |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | +                                                                                 | -                                                                                 | +                                                                                  |           |
| $f(x)$  |  |  |  |           |

$$\text{Άρα } \kappa = 1 \text{ και } \mu = 5$$

$$\text{Έτσι } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**Γ.** πρέπει  $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{2x - 3} - \sqrt{5} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ \sqrt{2x - 3} \neq \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ 2x - 3 \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x \neq 4 \end{cases}$

$$\text{και αφού } x \in \Omega \text{ άρα: } x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = 5 \text{ ή } x = 6$$

$$\text{έτσι } B = \{2, 3, 5, 6\}$$

**Δ.** Οι 4 παρατηρήσεις είναι τα  $\frac{4}{160} = \frac{1}{40} = 2,5\%$  του συνόλου των παρατηρήσεων.

$$\text{Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: } \bar{x} + 2s = 20 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } R = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s = 3\bar{x} \quad (2)$$

$$(2) \xRightarrow{(1)} 24s = 3(20 - 2s) \Rightarrow 24s = 60 - 6s \Rightarrow 30s = 60 \Rightarrow s = 2$$

$$\text{Έτσι από (1)} \Rightarrow \bar{x} + 4 = 20 \Rightarrow \bar{x} = 16$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι: } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10}, \text{ έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό c σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω:  $s' = s = 2$  και  $\bar{x}' = \bar{x} + c = 16 + c$ .

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$$CV' \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16 + c} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$20 \leq 16 + c \Rightarrow c \geq 4 \text{ και αφού } c \in \Omega \text{ έχω: } c = 4 \text{ ή } c = 5 \text{ ή } c = 6$$

$$\text{Έτσι } \Gamma = \{4, 5, 6\}$$

**Ε.** Έχουμε:  $A \cap \Gamma = \{4,5\}$

$$B - \Gamma = \{2,3\}$$

$$A \cup \Gamma = \{1,4,5,6\}$$

$$B \cup A' = \{2,3,5,6\}, \text{ αφού } A' = \{2,3,6\}$$

$$\text{Έτσι } P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

$$P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$

$$P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

$$P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}$$



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδειχθεί ότι :  $P(A') = 1 - P(A)$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$  με αντίστοιχες συχνότητες  $v_1, v_2, \dots, v_k$  και  $\alpha_i$  όπου  $i=1,2,\dots,k$  το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων τότε :

- i. Να αναφέρετε για ποιά δεδομένα χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα.
- ii. Με τι ισούται το τόξο  $\alpha_i$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x = x_0$  μέγιστο.

**Μονάδες 2**

- β.** Η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$ , όταν  $x = x_0$ .

**Μονάδες 2**

- γ.** Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και  $s$  η τυπική τους απόκλιση.

**Μονάδες 2**

- δ. Σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  ο λόγος  $\frac{N_i}{F_i}$  είναι ίσος με  $n$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , όταν  $P(A) \leq P(B)$  τότε  $A \subseteq B$ .

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - \kappa x^2 + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Αν  $f'(-1) = -3f'(1)$ , τότε :

- B1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa=3$ .

**Μονάδες 6**

- B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.

**Μονάδες 7**

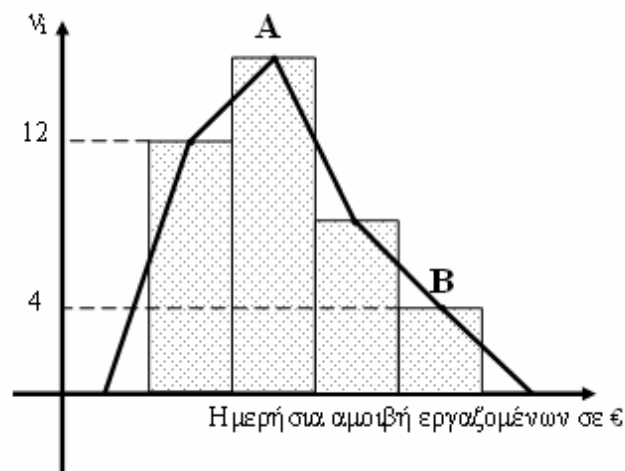
- B3.** Να βρείτε το όριο  $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h}$  και την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(3, f(3))$ .

**Μονάδες 7**

- B4.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του  $y=f(x)$  ως προς  $x$ , έχει την ελάχιστη τιμή.

**Μονάδες 5**

### **ΘΕΜΑ Γ**





Στο παραπάνω σχήμα δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων σε ευρώ (€) και το πολύγωνο συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής 40 εργαζομένων μιας επιχείρησης. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Η τετμημένη του σημείου A είναι 35, του σημείου B είναι 55 και η μέση ημερήσια αμοιβή των εργαζομένων είναι  $\bar{x} = 36$  €.

**Γ1.** Να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι  $c = 10$  και να γράψετε τις κλάσεις.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να δείξετε ότι οι συχνότητες  $v_2, v_3$  της δεύτερης και της τρίτης κλάσης αντίστοιχα είναι  $v_2 = 16, v_3 = 8$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής των εργαζομένων της επιχείρησης, το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

**Μονάδες 9**

**Γ4.** Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος των εργαζομένων της επιχείρησης και A, B δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A') \leq 0,25$  και  $P(B') \leq 0,65$ .

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{P(A - B) + P(B - A)}{2} \geq 0,55 - P(A \cap B)$$

**Μονάδες 5**

## **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι παρατηρήσεις που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$ , τυπική απόκλιση  $s$ , συντελεστή μεταβλητότητας  $CV = 25\%$  και διάμεσο  $\delta$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 4x^3 - (\bar{x} + 2s)x^2 + \left(\frac{503}{CV} + s\right)x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$  έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα  $x'x$  τότε :

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\bar{x} = 4, s = 1$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό  $c$  κατά τον οποίο πρέπει να αυξηθούν οι τιμές των παρατηρήσεων ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 5**

- Δ3.** Υποθέτουμε ότι η παραπάνω κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με πιθανότητες

$$P(A) = \frac{2s}{\bar{x}} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2\delta - 5s}.$$

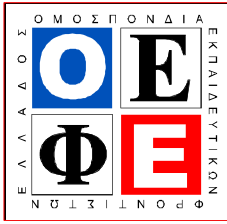
- i. Αν  $P(A \cap B) \cdot P(A \cup B) = \frac{1}{9}$  να βρείτε τις πιθανότητες:

$$P(A \cap B), P(A \cup B) \text{ και } P(A \cup B').$$

**Μονάδες 9**

- ii. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $x_i \leq 2$  είναι 5 τότε να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 4**



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 150-151
- A2.** Θεωρία βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 70
- A3.** Θεωρία βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 22
- A4.**
- α.** ΣΩΣΤΟ
  - β.** ΣΩΣΤΟ
  - γ.** ΛΑΘΟΣ
  - δ.** ΣΩΣΤΟ
  - ε.** ΛΑΘΟΣ

### ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η παράγωγος συνάρτηση της  $f$  είναι

$$f'(x) = 3x^2 - 2\kappa x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 3 + 2\kappa \\ f'(1) = 3 - 2\kappa \end{array} \right\} \text{οπότε}$$

$$f'(-1) = -3f'(1) \Leftrightarrow 3 + 2\kappa = -3(3 - 2\kappa) \Leftrightarrow$$

$$3 + 2\kappa = -9 + 6\kappa \Leftrightarrow 4\kappa = 12 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}$$

- B2.** Για  $\kappa=3$  έχουμε  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  και  $f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2$$

|       |           |     |     |           |   |
|-------|-----------|-----|-----|-----------|---|
| x     | $-\infty$ | 0   | 2   | $+\infty$ |   |
| f'(x) | +         | 0   | -   | 0         | + |
| f(x)  |           | ↗   | ↘   | ↗         |   |
|       |           | 4   | 0   |           |   |
|       |           | τ.μ | τ.ε |           |   |

**Μονοτονία**

Αν  $x \in (-\infty, 0]$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Αν  $x \in [0, 2]$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν  $x \in [2, +\infty)$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Ακρότατα**

Στο  $x_0=0$  έχουμε τοπικό μέγιστο το  $f(0)=4$  και

στο  $x_0=2$  έχουμε τοπικό ελάχιστο το  $f(2)=0$ .

**B3.** Έχουμε:

**A' ΤΡΟΠΟΣ**

$$f(3+h) = (3+h)^3 - 3(3+h)^2 + 4 \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^3 - 3(3+h)^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2(3+h-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3+h)^2 = 9 \end{aligned}$$

**B' ΤΡΟΠΟΣ**

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 4 \text{ και } f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9.$$

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 9$$

Το σημείο επαφής είναι  $M(3,4)$ . Η εφαπτομένη στο  $M(3,4)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με  $f'(3) = 9$  και η εξίσωσή της είναι  $y=9x+\beta$ .

Επειδή όμως το σημείο  $M$  ανήκει στην ευθεία έχουμε  $4 = 9 \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -23$  Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι  $y=9x-23$ .

**B4.** Έχουμε  $f''(x) = 6x - 6$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

|          |                                                                                       |            |                                                                                       |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| x        | $-\infty$                                                                             | 1          | $+\infty$                                                                             |
| $f''(x)$ | -                                                                                     | 0          | +                                                                                     |
| $f'(x)$  |  | -3<br>ο.ε. |  |

Άρα το σημείο στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής της  $y=f(x)$  ως προς  $x$  έχει την ελάχιστη τιμή είναι το  $(1, f'(1))$  δηλαδή  $(1, -3)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Το μέσον της δεύτερης κλάσης είναι 35 και της τέταρτης 55. Άρα

$$35 + \frac{c}{2} + c + \frac{c}{2} = 55 \Leftrightarrow 2c = 55 - 35 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}.$$

Επομένως οι 4 κλάσεις είναι [20,30), [30,40), [40,50) και [50,60).

**Γ2.** Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων έχουμε  $v_1 = 12$  και  $v_4 = 4$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Leftrightarrow v_2 + v_3 = 24 \quad (1)$$

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 25 + 35 \cdot v_2 + 45 \cdot v_3 + 4 \cdot 55}{40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 300 + 35 \cdot v_2 + 45 \cdot v_3 + 220 = 1440 \Leftrightarrow 35 \cdot v_2 + 45 \cdot v_3 = 920 \quad (2)$$

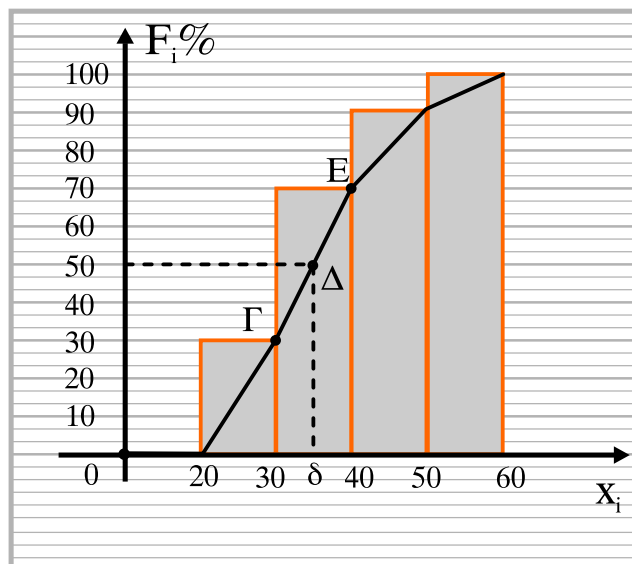
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

$$\left. \begin{array}{l} v_2 + v_3 = 24 \\ 35v_2 + 45v_3 = 920 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -45v_2 - 45v_3 = -1080 \\ 35v_2 + 45v_3 = 920 \end{array} \right\} \Rightarrow (+)$$

$$-10v_2 = -160 \Leftrightarrow v_2 = 16 \text{ οπότε } v_3 = 8.$$

**Γ3.**

| [ - )         | $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $F_i\%$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|---------|
| [20,30)       | 25    | 12    | 0,3   | 0,3   | 30      |
| [30,40)       | 35    | 16    | 0,4   | 0,7   | 70      |
| [40,50)       | 45    | 8     | 0,2   | 0,9   | 90      |
| [50,60)       | 55    | 4     | 0,1   | 1     | 100     |
| <b>Σύνολο</b> |       | 40    | 1     |       |         |



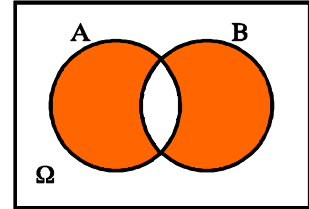
Έχουμε  $\Gamma(30,30)$ ,  $\Delta(\delta,50)$ ,  $E(40,70)$  και

$$\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{50 - 30}{\delta - 30} = \frac{20}{\delta - 30}$$

$$\lambda_{\Gamma E} = \frac{70-30}{40-30} = \frac{40}{10} = 4 \text{ οπότε}$$

$$\lambda_{\Gamma \Delta} = \lambda_{\Gamma E} \Leftrightarrow \frac{20}{\delta-30} = 4 \Leftrightarrow 4\delta = 140 \Leftrightarrow \delta = 35.$$

**Γ4.**  $P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B) =$   
 $= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad (1)$



$$\left. \begin{aligned} P(A') \leq 0,25 &\Leftrightarrow 1 - P(A) \leq 0,25 \Leftrightarrow P(A) \geq 0,75 \\ P(B') \leq 0,65 &\Leftrightarrow 1 - P(B) \leq 0,65 \Leftrightarrow P(B) \geq 0,35 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(+)} P(A) + P(B) \geq 1,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \geq 1,1 - 2P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\frac{P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)}{2} \geq 0,55 - P(A \cap B) \xRightarrow{(1)}$$

$$\frac{P(A - B) + P(B - A)}{2} \geq 0,55 - P(A \cap B)$$

### ΘΕΜΑ Δ

Έχουμε  $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = 0,25$

**Δ1.**  $f'(x) = 12x^2 - 2(\bar{x} + 2s)x$

Επειδή η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0=1$  είναι παράλληλη στον  $x'x$  έχει συντελεστή διεύθυνσης 0. Οπότε έχουμε

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 12 - 2(\bar{x} + 2s) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} + 2s = 6 \Leftrightarrow \bar{x} = 6 - 2s$$

$$\frac{s}{|\bar{x}|} = 0,25 \Leftrightarrow \frac{s}{|6-2s|} = 0,25 \Leftrightarrow s = 0,25 \cdot |6-2s|$$

- $s = 0,25 \cdot (6 - 2s) \Leftrightarrow s = 1,5 - 0,5s \Leftrightarrow \boxed{s = 1}$

Για  $s=1$  έχουμε  $\bar{x} = 6 - 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 4}$ . Τότε ο τύπος της  $f$  γίνεται:

$$f(x) = 4x^3 - (\bar{x} + 2s)x^2 + \frac{503}{0,25} + s = \boxed{4x^3 - 6x^2 + 2013}.$$

Έχουμε:  $f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

|       |           |   |        |           |   |
|-------|-----------|---|--------|-----------|---|
| x     | $-\infty$ | 0 | 1      | $+\infty$ |   |
| f'(x) | +         |   | -      |           | + |
| f(x)  | ↗ 2013    |   | ↘ 2011 |           | ↗ |
|       | τ.μ       |   | τ.ε    |           |   |

Η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο το  $f(0) = 2013$  και τοπικό ελάχιστο το  $f(1) = 2011$ .

- $s = -0,25 \cdot (6 - 2s) \Leftrightarrow s = -1,5 + 0,5s \Leftrightarrow s = -3$  απορρίπτεται.

**Δ2.** Έχουμε  $y = x + c$ . Τότε

$$\bar{y} = \bar{x} + c = 4 + c \text{ και } s_y = s = 1$$

$$CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{1}{|4+c|} \leq 0,1 \Leftrightarrow |4+c| \geq 10$$

- $4+c \leq -10 \Leftrightarrow c \leq -14$  απορρίπτεται γιατί  $c > 0$ .
- $4+c \geq 10 \Leftrightarrow c \geq 6$

Άρα ο μικρότερος θετικός  $c$  είναι ο 6.

**Δ3.** Έχουμε  $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  και  $P(B) = \frac{1}{2\delta - 5}$

Επειδή η κατανομή είναι κανονική τότε  $\delta = \bar{x} = 4$  οπότε  $P(B) = \frac{1}{2 \cdot 4 - 5} = \frac{1}{3}$ .

i. Έστω  $\alpha = P(A \cap B)$  και  $\beta = P(A \cup B)$  με  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  τότε

$$P(A \cap B) \cdot P(A \cup B) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \frac{1}{9} \quad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \alpha \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{5}{6} \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \alpha \left( \frac{5}{6} - \alpha \right) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{5}{6} \cdot \alpha - \alpha^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 18\alpha^2 - 15\alpha + 2 = 0$$

$$\text{που έχει ρίζες } \alpha_1 = \frac{2}{3} \text{ και } \alpha_2 = \frac{1}{6}$$

Επειδή όμως  $A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{3}$  οπότε  $\alpha = \frac{1}{6}$

$$\text{δηλαδή } \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{6}}$$

$$(2) \Rightarrow \beta = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \Rightarrow \beta = \frac{2}{3} \text{ δηλαδή } \boxed{P(A \cup B) = \frac{2}{3}}$$

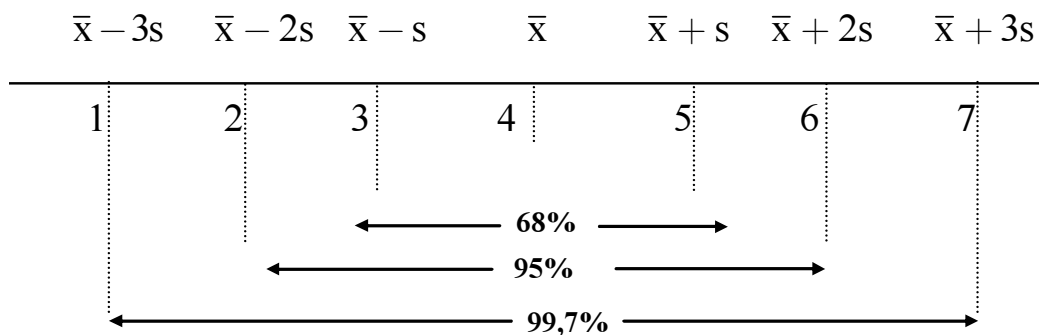
Έχουμε

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') =$$

$$= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ δηλαδή}$$

$$\boxed{P(A \cup B') = \frac{5}{6}}$$

- iii. Επειδή η κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική με  $\bar{x} = 4$ ,  $s = 1$  και  $\bar{x} - 2s = 2$  έχουμε:



Το ποσοστό των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $x_i \leq 2$  είναι  $\frac{100 - 95}{2} = 2,5\%$ . Τότε

το μέγεθος του δείγματος είναι  $n = 5 \cdot \frac{100}{2,5} = 200$ .



**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 1 Απριλίου 2012

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

( 9 μονάδες)

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_1 \in A$  ;

( 3 μονάδες)

**A3.** Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τί τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

( 3 μονάδες)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  μιας τιμής  $x_i$  εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής  $x_i$ .
- β)** Αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε η συνάρτηση  $f(x)$  δεν παρουσιάζει ακρότατα.
- γ)** Σε μια κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ .
- δ)** Αν η διάμεσος  $v$  παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος  $v$  των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός.
- ε)** Αν A,B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B» και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B» είναι ισοδύναμες.

(2X5 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Β

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας συνολικής σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ. Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλατείς κλάσεις και γνωρίζουμε ότι:

- το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων  $v_i$  είναι 250.
- το μέσο της άνω βάσης του ορθογωνίου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων  $f_i\%$ , που αντιστοιχεί στη 2<sup>η</sup> κλάση είναι το σημείο A(10,α).
- Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
- Η συχνότητα  $f_1\%$  είναι τριπλάσια της  $f_2\%$  και δεκαπλάσια της  $f_4\%$ , ενώ η  $f_2\%$  είναι διπλάσια της  $f_3\%$  και πενταπλάσια της  $f_5\%$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $\alpha=20$  και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

(8 μονάδες)

**B2.** Να υπολογιστεί η μέση τιμή, καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τί είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή;

(6 μονάδες)

**B3.** Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγόμενων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός συνταξιούχων της χώρας είναι 2.850.000.

(5 μονάδες)

**B4.** Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό ετήσιο εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8.640 ευρώ τότε:

i. Επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει το επίδομα.

(3 μονάδες)

ii. Αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 3<sup>ης</sup> κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 4<sup>ης</sup> και 400 ευρώ από καθέναν της 5<sup>ης</sup> κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος.

(3 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}$  και  $g(x) = 2P(B) \cdot \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{16}x^2$  και τα A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$ .  
(4 μονάδες)

Γ2. Αν η πιθανότητα  $P(A)$  του ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ίση με το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g(x)$  στο  $x_0=4$  σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία  $\frac{\pi}{4}$ , τότε να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B)$ .  
(8 μονάδες)

Γ3. Αν  $P(A) = \frac{3}{4}$  και  $P(B) = \frac{1}{2}$  και  $P(A \cap B) \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6} \right\}$  τότε:

α) Να δείξετε ότι  $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ .  
(5 μονάδες)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B.  
(4 μονάδες)

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B.  
(4 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(6 μονάδες)

Δ2. Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:

$$f(P(B)) = P(A), \text{ όπου } f(x) \text{ η προηγούμενη συνάρτηση.}$$

i. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

(7 μονάδες)

- ii. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απόλυτων συχνοτήτων  $v_i$  και τα ενδεχόμενα  $\Gamma, \Delta$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ , διαφορετικά των  $A$  και  $B$  με  $\Gamma \subseteq \Delta$  και  $\Gamma \neq \Delta$ .

| $x_i$  | $v_i$                   |
|--------|-------------------------|
| 1      | $2P(\Gamma)$            |
| 2      | $4P(\Delta)$            |
| 3      | $4P(\Gamma)+4P(\Delta)$ |
| 4      | $P(A)$                  |
| Σύνολα |                         |

- α) Να αποδείξετε ότι  $v_1=1$  και  $v_2=3$  και να συμπληρωθεί ο πίνακας.  
(6 μονάδες)
- β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων.  
(3 μονάδες)
- γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:  
 $P(\Gamma \cap \Delta), P(\Gamma \cup \Delta)$ .  
(3 μονάδες)

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 1 Απριλίου 2012

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 151.  
**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 14.  
**A3.** Σχολικό βιβλίο σελ. 84 (Τα μέτρα θέσης μας δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα μέτρα διασποράς την διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους.  
**A4.**  $\alpha \rightarrow \Lambda$ ,  $\beta \rightarrow \Sigma$ ,  $\gamma \rightarrow \Sigma$ ,  $\delta \rightarrow \Lambda$ ,  $\varepsilon \rightarrow \Lambda$ .

### ΘΕΜΑ Β

- B1.** Αφού το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 250 θα είναι  $v=250$  όπου  $v$  το πλήθος των συνταξιούχων του δείγματος.

Το πλάτος  $c$  κάθε μιας από τις 5 κλάσεις θα είναι  $\frac{R}{5} = \frac{20}{5} = 4$ .

Αφού το μέσο της δεύτερης κλάσης έχει τετμημένη 10 θα είναι  $x_2=10$  και αν η πρώτη κλάση είναι  $[κ, κ+c)$  η δεύτερη θα είναι  $[κ+c, κ+2c)$  και θα είναι:

$$x_2 = \frac{\kappa + c + \kappa + 2c}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{\kappa + 4 + \kappa + 8}{2} \Leftrightarrow 2\kappa + 12 = 20 \Leftrightarrow \kappa = 4.$$

Αφού  $f_2\% = a$  θα είναι σύμφωνα με τα δεδομένα

$$f_1\% = 3a, f_3\% = \frac{a}{2}, f_4\% = \frac{3a}{10}, f_5\% = \frac{a}{5}.$$

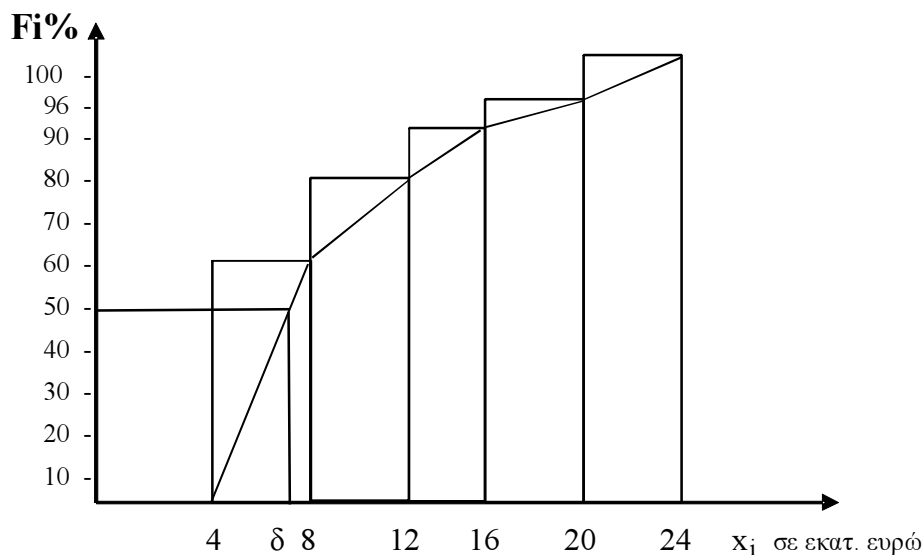
$$\text{Όμως } f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 3a + a + \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} + \frac{a}{5} = 100 \Leftrightarrow a = 20.$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων γράφεται:

| Κλάσεις       | $x_i$ | $f_i\%$ | $f_i$ | $v_i$ | $N_i$ | $F_i\%$ | $F_i$ | $x_i \cdot v_i$ |
|---------------|-------|---------|-------|-------|-------|---------|-------|-----------------|
| [4-8)         | 6     | 60      | 0,60  | 150   | 150   | 60      | 0,60  | 900             |
| [8-12)        | 10    | 20      | 0,20  | 50    | 200   | 80      | 0,80  | 500             |
| [12-16)       | 14    | 10      | 0,10  | 25    | 225   | 90      | 0,90  | 350             |
| [16-20)       | 18    | 6       | 0,06  | 15    | 240   | 96      | 0,96  | 270             |
| [20-24)       | 22    | 4       | 0,04  | 10    | 250   | 100     | 1     | 220             |
| <b>ΣΥΝΟΛΑ</b> |       | 100     | 1     | 250   |       |         |       | 2240            |

Για τις συχνότητες  $v_i$  χρησιμοποιήσαμε τον τύπο  $v_i = f_i \cdot v$ .

- B2.** Για τη μέση τιμή των συντάξεων έχουμε  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{2240}{250} = 8,96$  εκατοντάδες ευρώ, δηλαδή 896 ευρώ.  
Για την εύρεση της διαμέσου των συντάξεων σχηματίζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων  $F_i\%$ .



$$\text{Από αυτό έχουμε } \frac{\delta - 4}{8 - 4} = \frac{50 - 0}{60 - 0} \Leftrightarrow \delta - 4 = \frac{4 \cdot 5}{6} \Leftrightarrow \delta \approx 4 + 3,33 \approx 7,33.$$

Αφού  $\bar{x} > \delta$  η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

**B3.** Πάνω από 1300 ευρώ δηλαδή από 13 εκατοντάδες είναι τα  $\frac{16-13}{16-12}$  της 3<sup>ης</sup> κλάσης και όλοι που είναι στην 4<sup>η</sup> και στην 5<sup>η</sup> κλάση, δηλαδή ποσοστό  $\left(\frac{3}{4} \cdot 10 + 6 + 4\right)\% = 17,5\%$  δηλαδή  $\frac{17,5}{100} \cdot 2850000 = 498750$  συνταξιούχοι.

**B4.** Μέγιστο ετήσιο εισόδημα 8640 ευρώ σημαίνει ότι το μέγιστο μηνιαίο εισόδημα είναι  $\frac{8640}{12} = 720$  ευρώ, δηλαδή 7,2 εκατοντάδες ευρώ.

- i. Από 4-7,2 εκατοντάδες ευρώ ανήκουν  $\frac{7,2-4}{8-4} = \frac{3,2}{4} = 0,80 = 80\%$  των συνταξιούχων της πρώτης κλάσης, δηλαδή ποσοστό  $0,80 \cdot 60 = 48\%$  του συνόλου των συνταξιούχων. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 48%.
- ii. Το ποσό που θα αφαιρεθεί από τις ανώτερες κλάσεις του δείγματος ανά μήνα είναι  $100 \cdot 25 + 200 \cdot 15 + 400 \cdot 10 = 2500 + 3000 + 4000 = 9500$  ευρώ και θα διανεμηθεί σε  $\frac{80}{100} \cdot 150 = 120$  της 1<sup>ης</sup> κλάσης. Άρα καθένας από τους δικαιούχους θα πάρει  $\frac{9500}{120} = 79,16$  ευρώ ανά μήνα.

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για την  $f(x)$  πρέπει να ισχύουν:  $(x \geq 0 \text{ και } x - 4 \neq 0)$ . Άρα  $A_f = [0, 4) \cup (4, +\infty)$ .  
Για την  $g(x)$  πρέπει να ισχύουν:  $(x > 0 \text{ και } x \geq 0)$  δηλαδή  $x > 0$ . Άρα  $A_g = (0, +\infty)$ .

**Γ2.** 
$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3\sqrt{x} - 6}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{3}{4} = P(A).$$

Είναι:  $g'(x) = \frac{2P(B)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{16}2x = \frac{2P(B)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{8}$

οπότε  $g'(4) = \frac{2P(B)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{8}.$

Αν  $\omega = \frac{\pi}{4}$  τότε

$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1 = g'(4) \Leftrightarrow \frac{2P(B)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2P(B)}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}.$

Γ3. α Αν  $P(A \cap B) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = P(B)$  άτοπο γιατί  $(A \cap B) \subseteq B$ .

$$\text{Αν } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ τότε } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{13}{12} > 1 \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

β  $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) =$   
 $= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}.$

γ.  $P[(A - B) \cup (B - A)] =$   
 $= P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$   
 $= \frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{10}{20} - \frac{16}{20} = \frac{9}{20}.$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1.  $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x \cdot (x^2 - 1)$

| x       | $-\infty$                                                   | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |   |   |
|---------|-------------------------------------------------------------|----|---|---|-----------|---|---|
| -4x     | +                                                           | +  | ○ | - | -         |   |   |
| $x^2-1$ | +                                                           | ○  | - | - | ○         | + |   |
| f'(x)   | +                                                           | ○  | - | ○ | +         | ○ | - |
| f(x)    | <div><div>↗</div><div>↘</div><div>↗</div><div>↘</div></div> |    |   |   |           |   |   |

Άρα η  $f \uparrow (-\infty, -1]$ ,  $f \downarrow [-1, 0]$ ,  $f \uparrow [0, 1]$ ,  $f \downarrow [1, +\infty)$ .

Έχει τοπικό μέγιστο για  $x_1 = -1$  το  $f(-1) = 2$  και για  $x_3 = 1$  το  $f(1) = 2$  και τοπικό ελάχιστο για  $x_2 = 0$  το  $f(0) = 1$ .



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E\_3.Μλ3Γ(α)

- Δ2. i) Είναι:  $0 \leq P(B) \leq 1$  και  $f \uparrow$  στο  $[0,1]$ .  
 Συνεπώς:  $f(0) \leq f(P(B)) \leq f(1) \Leftrightarrow 1 \leq P(A) \leq 2$  και  $0 \leq P(A) \leq 1$  και  
 αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα  
 $P(A)=1$  και  $A=\Omega$ .

Ακόμα:

$$f(P(B)) = P(A) \Leftrightarrow -P^4(B) + 2P^2(B) + 1 = 1 \Leftrightarrow P^2(B) \cdot (2 - P^2(B)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$P(B) = 0 \text{ ή } P(B) = \pm\sqrt{2} \text{ απορ. αφού } 0 \leq P(B) \leq 1$$

Άρα  $P(B)=0$  και  $B = \emptyset$ .

- Δ2. ii. α)

- $\Gamma \neq A = \Omega$  και  $\Gamma \neq B = \emptyset$

Άρα:

$$0 < P(\Gamma) < 1 \Leftrightarrow 0 < 2P(\Gamma) < 2 \Leftrightarrow 0 < v_1 < 2 \text{ και } v_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow v_1 = 1,$$

$$\text{οπότε } P(\Gamma) = \frac{1}{2}$$

- $\Delta \neq \Omega, \emptyset$  και  $\Gamma \subseteq \Delta$ ,  $\Gamma \neq \Delta$

Άρα:

$$P(\Gamma) < P(\Delta) < 1 \Leftrightarrow 4P(\Gamma) < 4P(\Delta) < 4 \Leftrightarrow 2 < v_2 < 4 \text{ και } v_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow v_2 = 3,$$

$$\text{οπότε } P(\Delta) = \frac{3}{4}.$$

Συνεπώς:

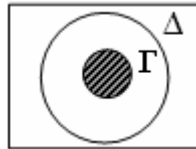
| $x_i$ | $v_i$  |
|-------|--------|
| 1     | 1      |
| 2     | 3      |
| 3     | 5      |
| 4     | 1      |
|       | $v=10$ |

β)  $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012**

**E\_3.Μλ3Γ(α)**

γ) Είναι  $\Gamma \cap \Delta = \Gamma$   
 οπότε  $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$



και  $\Gamma \cup \Delta = \Delta$  οπότε  $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Delta) = \frac{3}{4}$

